МОУ СОШ №5 – «Школа здоровья и развития»

Решение заданий части С

ЕГЭ

по математике *2011* года

Автор: учитель математики Е.Ю. Семёнова

С1. Решите уравнение $\left(tg^2x-\sqrt{3}tgx\right)\cdot\sqrt{-5\cos x}=0$

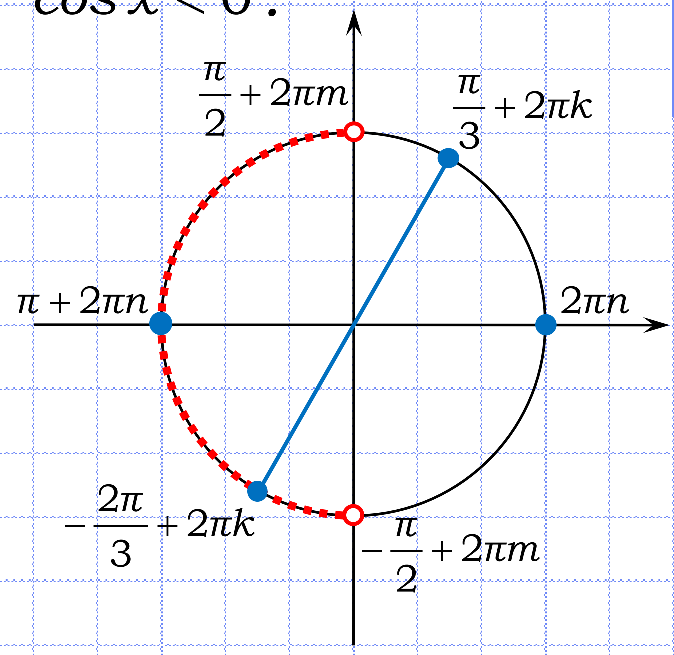
Решение. ОДЗ: $\begin{cases}-5\cos x\ge 0,\\ \cos x\ne 0;\end{cases}\Leftrightarrow\quad \cos x<0.$

$$\left(tg^2x-\sqrt{3}tgx\right)\cdot\sqrt{-5\cos x}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2x-\sqrt{3}tgx=0,\\ \sqrt{-5\cos x}=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx-\sqrt{3}=0,\\ tgx=0,\\ \cos x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in Z\\ x=\pi n,\ \ n\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ \ m\in Z\end{array}\right.$$

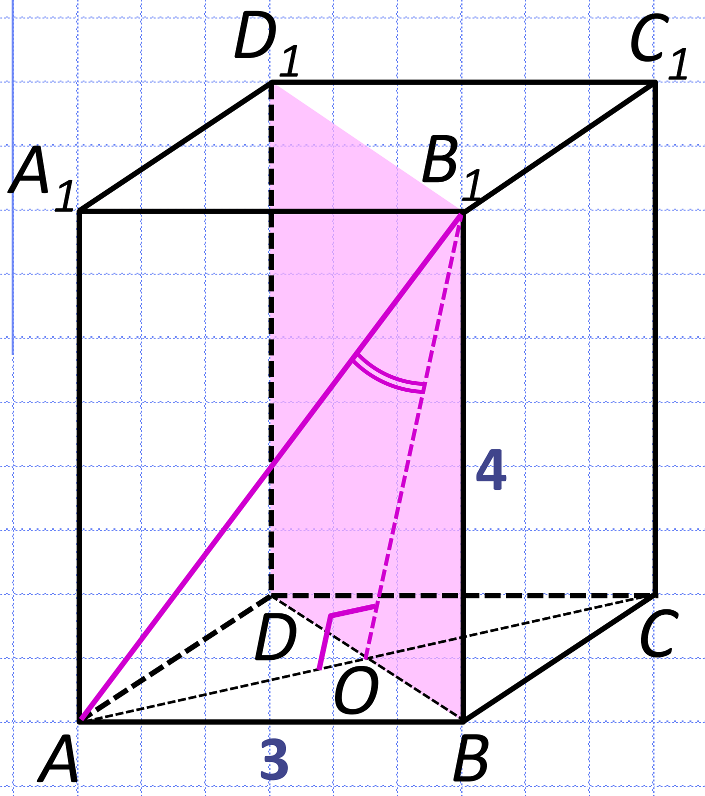


С учетом ОДЗ:

$$x=\pi+2\pi n,\ \ n\in Z$$

$$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z$$

C2. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны оснований которой равны 3, а боковые рёбра 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.



Решение.

Так как O середина отрезка BD, то $AO \perp (BDD_1)$. $\angle AB_1O$ – искомый.

$AO = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; $AB_1 = 5$ (в п/у ΔABB_1).

$\sin \angle AB_1O = AO : AB_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

$\angle AB_1O = \arcsin \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

Ответ: $\arcsin \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

С3. Решите неравенство $\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5\ge 1$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}19-9x>0,\\ 3-x>0,\\ 3-x\ne 1;\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in(-\infty;2)\cup\left(2;\frac{19}{9}\right)$

$$\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5\ge 1$$

$$\log_{0,5^2}(19-9x)\cdot\frac{1}{\log_{0,5}(3-x)}\ge 1$$

$$\frac{\log_{0,5}(19-9x)}{2\log_{0,5}(3-x)}\ge 1$$

$$\log_{(3-x)^2}(19-9x)\ge 1$$

$$\log_{(3-x)^2}(19-9x)\ge\log_{(3-x)^2}(3-x)^2$$

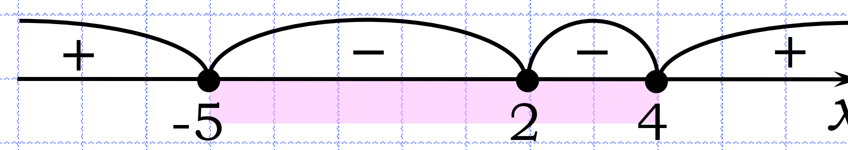
$$\left((3-x)^2-1\right)\left((19-9x)-(3-x)^2\right)\ge 0$$

$$\left((3-x)-1\right)\left((3-x)+1\right)\left(10-3x-x^2\right)\ge 0$$

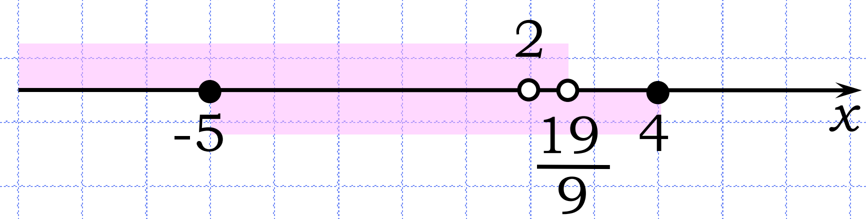
$$(2-x)(4-x)\left(10-3x-x^2\right)\ge 0$$

$$(x-2)(x-4)\left(x^2+3x-10\right)\le 0$$

$$(x-2)^2(x-4)(x+5)\le 0$$

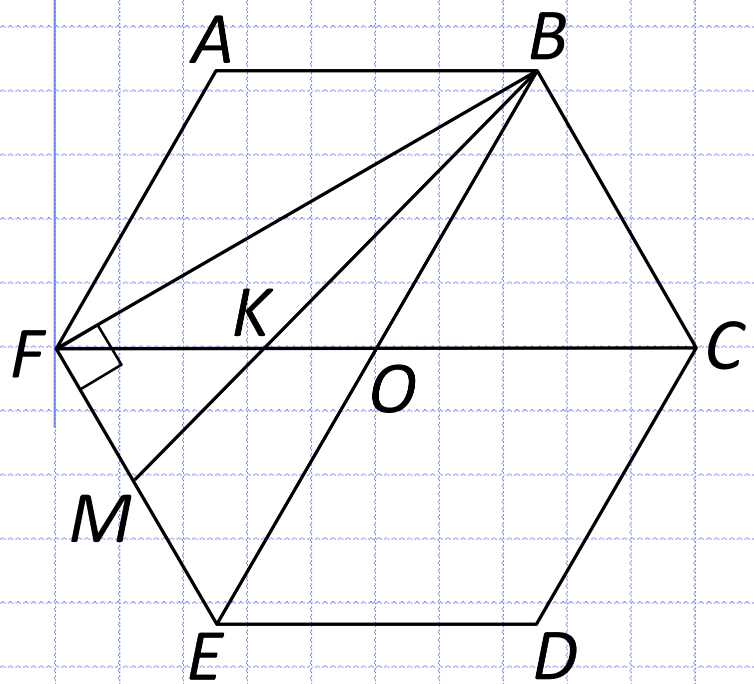


С учетом ОДЗ:



$$x\in[-5;2);\left(2;\frac{19}{9}\right)$$

С4. **Через вершину *B* правильного шестиугольника *ABCDEF* проведена прямая, пересекающая диагональ *CF* в точке *K*. известно, что прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 1 : 2. Найдите отношение *CK* : *KF*.**



Решение.

Пусть O – центр правильного шестиугольника ABCDEF, S – его площадь. Тогда

$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S$

$S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S$

1 случай *(K между F и O)*

$S_{BEF} = S - S_{BCDE} - S_{ABF} = S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S.$

Пусть $S_{BMF} = xS$, *тогда* $S_{BME} = \frac{1}{3}S - xS$

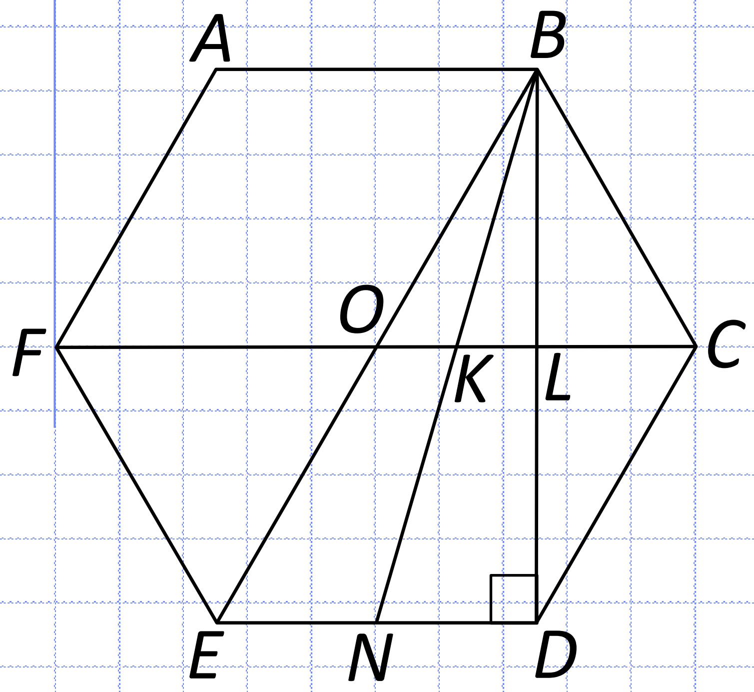
По условию $S_{ABMF} : S_{BCDEM} = 1 : 2 \Rightarrow$

$S_{ABMF} : S_{BCDEM} = (\frac{1}{6}S + xS) : (\frac{1}{2}S + (\frac{1}{3}S - xS)) = 1 : 2$

$(\frac{1}{6} + x) : (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - x) = 1 : 2$, *откуда* $x = \frac{1}{6}$. *Т.е.* $S_{BMF} = S_{BME} = \frac{1}{6}S \Rightarrow BM$ *– медиана,* $FM = ME$. *Из подобия треугольников MKF и BKC* $\Rightarrow$

$BC : FM =$ ***CK : KF = 2 : 1****.*

С4. Через вершину *B* правильного шестиугольника *ABCDEF* проведена прямая, пересекающая диагональ *CF* в точке *K*. известно, что прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 1 : 2. Найдите отношение *CK* : *KF*.



Решение.

2 случай *(К между С и О)*

По условию $S_{BCDN} : S_{ABNEF} = 1 : 2 \Rightarrow$

$S_{BDE} = S - S_{BCD} - S_{ABEF} = S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S.$

Аналогично, $S_{BDN} = S_{BEN} = \frac{1}{6}S$, *значит*

BN – медиана, EN = DN $\Rightarrow$

$OK = KL = \frac{1}{4}OC = \frac{1}{2}LC$, $KC = \frac{3}{4}OC \Rightarrow$

CK : KF = 3 : 5.

Ответ: *2 : 1 или 3 : 5.*

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-4)^2+(|y|-4)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. *т.к. xy > 0, то либо x > 0, y > 0, либо x < 0, y < 0.*

1 случай:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=4,\\ y=ax+1,\\ x>0,\ y>0\end{cases}\qquad(1)$$

Система (1) *имеет решение, если $D_1 \geq 0$, т.е. при*

$$a\in\left[\frac{6-\sqrt{21}}{6};\ \frac{6+\sqrt{21}}{6}\right]$$

$$(x-4)^2+(ax+1-4)^2=4$$

$$(a^2+1)x^2-(6a+8)x+21=0$$

Ищем дискриминант:

$$D_1=(6a+8)^2-4(a^2+1)21=-48a^2+96a-20$$

$$D_1=0\ \text{при}\ a_1=\frac{6+\sqrt{21}}{6}\ \text{и}\ a_2=\frac{6-\sqrt{21}}{6}$$

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-4)^2+(|y|-4)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

2 случай:

$$\begin{cases}(-x-4)^2+(-y-4)^2=4,\\ y=ax+1,\\ x<0,\ y<0\end{cases} \qquad (2)$$

$$(x+4)^2+(ax+1+4)^2=4$$

$$(a^2+1)x^2+(10a+8)x+37=0$$

Ищем дискриминант:

$$D_2=(10a+8)^2-4(a^2+1)37=-48a^2+160a-84$$

$$D_2=0 \ \textit{при} \ a_3=\frac{10+\sqrt{37}}{6} \ \textit{и} \ a_4=\frac{10-\sqrt{37}}{6}$$

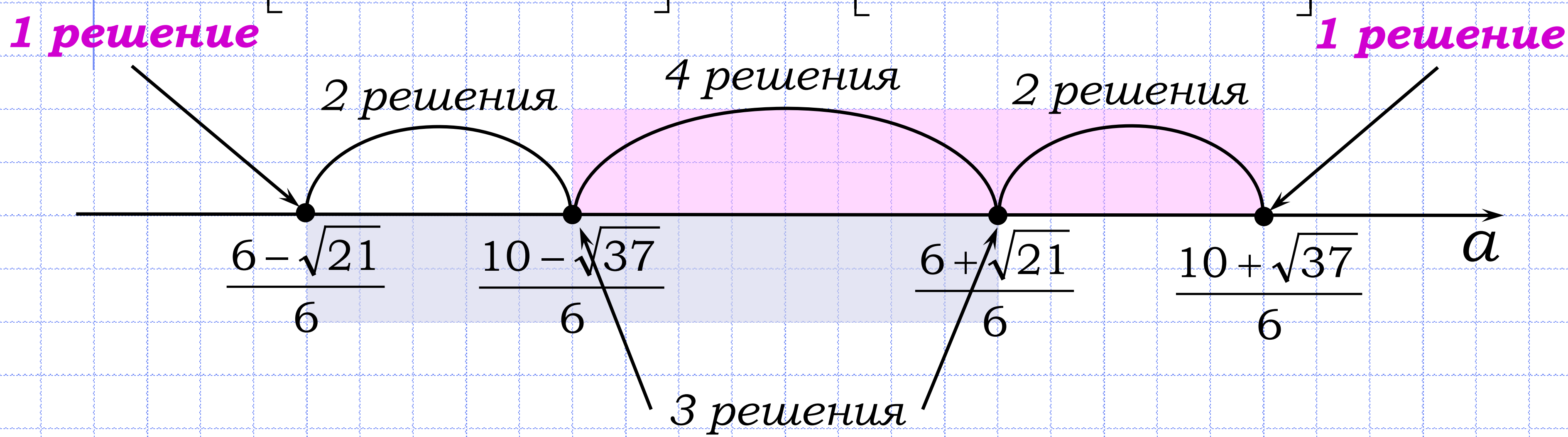
Система (2) *имеет решение, если* $D_2\geq 0$, *т.е. при*

$$a\in\left[\frac{10-\sqrt{37}}{6};\ \frac{10+\sqrt{37}}{6}\right]$$

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (|x|-4)^2+(|y|-4)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Совместим полученные решения:

$$a\in\left[\frac{6-\sqrt{21}}{6};\ \frac{6+\sqrt{21}}{6}\right] \qquad a\in\left[\frac{10-\sqrt{37}}{6};\ \frac{10+\sqrt{37}}{6}\right]$$



Ответ: $\dfrac{6-\sqrt{21}}{6};\ \dfrac{10+\sqrt{37}}{6}.$

С6. Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Решение.

а) *Да, может. Например, сумма любых двадцати семи чисел из набора* $5, 4, 3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{17}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{13}$ *не больше, чем* $5 + 4 + 3 + 2 \cdot 17 + 7 = 53$, *и их среднее арифметическое меньше 2.*

б) *Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим первые 27 чисел, считая слева. Их сумма S меньше 54. Пусть количество единиц среди них равно x .*

Тогда $53 \geq S \geq x + 2(24 - x) + 3 + 4 + 5$, $x \geq 7$, *то есть среди выбранных 27 чисел всегда есть семь единиц. Каждое из оставшихся шести чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум тринадцать единиц.*

С6. Набор состоит из тридцати трёх натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых двадцати семи чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно тринадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее тринадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

Решение.

в) Используя тринадцать единиц и числа 3, 4, 5, можно составить все суммы от 1 до 25. Если среди оставшихся семнадцати чисел есть число от 3 до 27, то его можно добавить и получить в сумме 28.

Если среди оставшихся семнадцати чисел нет чисел от 3 до 27, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 27.

Так как сумма этих семнадцати чисел не больше 53, то только одно из чисел может быть больше 27.

Значит, в этом случае как минимум шестнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и тринадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 28.

Ответ: а) да; б) нет.