Таким образом, уравнение не может иметь более одного корня. Несложно угадать и проверить, что $x = 2$ — корень данного уравнения.

в) Область определения уравнения: $x > 0$.

При $x > 0$ функция, стоящая в левой части уравнения, — возрастает, а функция, стоящая в правой части уравнения, — убывает.

Следовательно, уравнение не может иметь более одного корня. Таким корнем является число 1. Проверим это: $3\cdot 2^{|\log_2 1|} = 7 - 4\cdot 1^2$, $3 \cdot 2^0 = 7 - 4$; $3 = 3$.

Ответ: 1) 1; 2) 2; 3) 1.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения.

1) $3^x + 4^x = 25$;

2) $6^x + 5^x = 11$;

3) $6^x \cdot 5^x = 11$;

4) $3^{x^2+\frac{81}{x^2}-17} = -6 - 6x - x^2$;

5) $3^x + 4^x = 5^x$;

6) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$;

7) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$;

8) $3{,}7^x + \left(\frac{10}{37}\right)^x = 2\sin x$.

Ответ: 1) 2; 2) 1; 3) $\log_{30} 11$; 4) –3; 5) 2; 6) 2; 7) 2; 8) корней нет.

Показательные неравенства

I вид. Простейшие.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности степенной функции:

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$$

если $a > 1$, то $f(x) > \varphi(x)$, если $0 < a < 1$, то $f(x) < \varphi(x)$.

Учитывая это свойство, многие простейшие показательные неравенства решаются методом приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

Пример.

Решить неравенства.

а) $25^x > 125^{3x-2}$;

б) $(0{,}3)^{4x^2-2x-2} \le (0{,}3)^{2x-3}$;

в) $\sqrt{2^{x^2+5x-10}}\cdot\sqrt{3^{x^2+5x-10}}\geq 36.$

Решение.

а) Поскольку $25^x=\left(5^2\right)^x=5^{2x}$, $125^{3x-2}=\left(5^3\right)^{3x-2}=5^{9x-6}$, то данное неравенство равносильно неравенству $5^{2x}>5^{9x-6}$, решая которое мы получим:

$2x>9x-6$, то есть $x<\frac{6}{7}$.

Следовательно, промежуток $\left(-\infty;\frac{6}{7}\right)$ есть множество всех решений искомого неравенства.

б) Исходное неравенство равносильно неравенствам

$4x^2-2x-2\geq 2x-3;$

$4x^2-4x+1\geq 0;$

$(2x-1)^2\geq 0.$

Исходному неравенству удовлетворяют все действительные числа.

в) Так как $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, то данное неравенство равносильно неравенствам

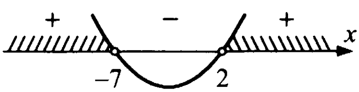
$2^{\frac{x^2+5x-10}{2}}\cdot 3^{\frac{x^2+5x-10}{2}}\geq 36,$

$6^{\frac{x^2+5x-10}{2}}\geq 6^2,\quad \frac{x^2+5x-10}{2}\geq 2,$

$x^2+5x-14\geq 0.$

Для решения последнего неравенства найдем корни соответствующего ему квадратного уравнения:

$x_1=-7,\ x_2=2.$



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty;-7]\cup[2;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $2^{3-5x}>4;$

2) $5^{x^2-3x+2}\leq 1;$

3) $2^{\sqrt{x}}\leq 4;$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}>\sqrt{3};$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} > 2;$

6) $3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1;$

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \le 2;$

8) $\sqrt{2^{x-1} \cdot \sqrt[3]{4^{x} \cdot (0{,}125)^{\frac{1}{x}}}} > 4\sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$

Ответ: 1) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$; 2) $[1; 2]$; 3) $[0; 4]$;

4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 5) $(-1; 0)$; 6) $[0; 64)$;

7) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$; 8) $\left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup (3; +\infty)$.

II вид. Неравенства, решаемые подстановкой $a^{f(x)} = t$.

Пример.

Решить неравенства.

а) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0;$

б) $\frac{1}{2^x - 1} \ge \frac{1}{1 - 2^{x-1}};$

в) $10^{7x-1} + 6 \cdot 10^{1-7x} - 5 \le 0.$

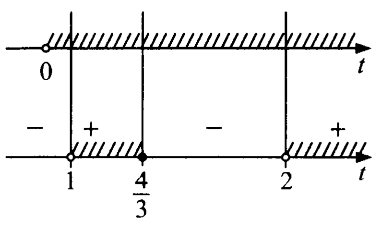
Решение.

а) Так как $4^x = \left(2^x\right)^2$, то, обозначив $2^x = t$, получим неравенство $t^2 - 3t + 2 < 0$, $1 < t < 2$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $1 < 2^x < 2$, $0 < x < 1$.

б) Обозначив $2^x = t$, получим

$$\begin{cases} t > 0, \\ \frac{1}{t-1} \ge \frac{1}{1-0{,}5t}; \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0 \\ \frac{2-1{,}5t}{(t-1)(2-t)} \ge 0 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} 1 < t \le \frac{4}{3}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 1 < 2^x \le \frac{4}{3}, \\ 2^x > 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \log_2 \frac{4}{3}, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

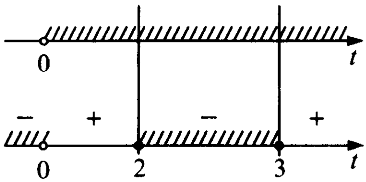
Следовательно, множество всех решений исходного неравенства есть множество $\left(0;\ \log_2 \frac{4}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

в) Используя свойства степени, запишем данное неравенство в виде

$$10^{7x-1} + \frac{6}{10^{7x-1}} - 5 \le 0.$$

Обозначив $10^{7x-1} = t$, получим

$$\begin{cases} t > 0, \\ t + \frac{6}{t} - 5 \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t > 0, \\ \frac{t^2 - 5t + 6}{t} \le 0; \end{cases}$$



$2 \le t \le 3, \qquad 2 \le 10^{7x-1} \le 3,$

отсюда находим $\lg 2 \le 7x - 1 \le \lg 3$,

$\frac{1}{7}(1 + \lg 2) \le x \le \frac{1}{7}(1 + \lg 3), \quad \frac{1}{7}\lg 20 \le x \le \frac{1}{7}\lg 30.$

Отрезок $\left[\frac{1}{7}\lg 20;\ \frac{1}{7}\lg 30\right]$ есть множество решений данного неравенства.

Ответ: 1) (0; 1); 2) $\left(0;\ \log_2 \frac{4}{3}\right] \cup (1; +\infty)$;

3) $\left[\frac{1}{7}\lg 20;\ \frac{1}{7}\lg 30\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} > 3$;

2) $2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{0,5\sqrt{x}} < 24$;

3) $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} < \left(12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 2}\right) \cdot \left(7^{\log_7 3 + \log_{49} 4}\right)$;

4) $2^{4x} - 50 \cdot 4^x - 896 > 0$;

5) $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} \le 10$;

6) $\dfrac{4^x+5}{2^{x+1}-1}\ge 3;$

7) $4^x-9\cdot 2^x+8^{\log_5 7\cdot\log_7 5}<0;$

8) $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1};$

9) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}\ge 6.$

Ответ:

1) $(2;+\infty];$

2) $[0;36);$

3) $(-1;1);$

4) $(3;+\infty);$

5) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\le x\le\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;$

6) $(-1;1]\cup[2;+\infty);$

7) $(0;3);$

8) $\left(-\sqrt{7};-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};\sqrt{7}\right)$; 9) $[1{,}5;+\infty)$.

III вид. Неравенства, решаемые методом интервалов.

Метод интервалов основан на следующем утверждении.

Если функция f на интервале $(a;\ b)$ непрерывна и не обращается в ноль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пример.

Решить неравенства.

а) $(2^x-3)(3^x-9)<0;$

б) $(4^x-6\cdot 2^x+9)(3^x-9)\ge 0;$

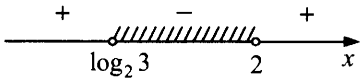
в) $\dfrac{x^2-2}{2^x-3}<0;$

г) $\dfrac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1.$

Решение.

а) Область определения неравенства — все действительные числа.

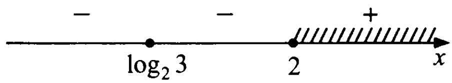
Рассмотрим функцию $f(x)=(2^x-3)(3^x-9)$. Решив уравнение $f(x)=0$, находим нули функции: $\log_2 3$; 2. На каждом из промежутков $(-\infty;\log_2 3)$; $(\log_2 3;2)$, $(2;+\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в ноль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак.



Множество решений исходного неравенства есть множество $(\log_2 3;\ 2)$.

б) Область определения неравенства — все действительные числа. Найдем нули функции $f(x)=\left(4^x-6\cdot 2^x+9\right)\left(3^x-9\right)$, решив уравнение $\left(2^x-3\right)^2\cdot\left(3^x-9\right)=0$: $x_{1,2}=\log_2 3$; $x_3=2$.

Отметим нули функции на области определения неравенства и определим знаки функции на каждом из получившихся интервалов.



Множество решений исходного неравенства: $\{\log_2 3\}\cup[2;+\infty)$.

в) Область определения неравенства: $2^x-3\neq 0$, $x\neq\log_2 3$.

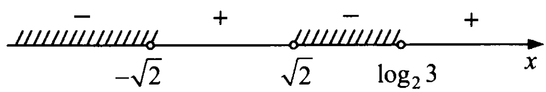
Нули функции $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2^x-3}$: $x=\pm\sqrt{2}$.

Сравним $\sqrt{2}$ и $\log_2 3$.

$\sqrt{2}<1{,}5$; $\log_2 3>1{,}5$, так как $3>2\sqrt{2}$.

Следовательно, $\sqrt{2}<\log_2 3$.

Отметив нули функции на области определения неравенства и определив знаки функции на каждом из получившихся интервалов, получим множество решений неравенства.

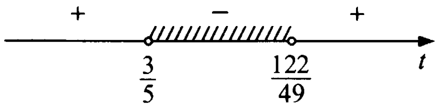


$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\log_2 3\right)$.

г) Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{2\cdot 3^3\cdot 3^x-5^3\cdot 5^x}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1;\quad \frac{5^x\left(54\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-125\right)}{5^x\left(5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-3\right)}<1;\quad \frac{54\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-125}{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-3}<1.$$

Пусть $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$. Получим $\frac{54t-125}{5t-3} < 1$, $\quad \frac{49t-122}{5t-3} < 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов. Функция $f(t) = \frac{49t-122}{5t-3}$ определена для всех t, кроме $t = \frac{3}{5}$, непрерывна на области определения и равна нулю в точке $t = \frac{122}{49}$. Точки $\frac{3}{5}$ и $\frac{122}{49}$ разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых функция сохраняет знак:



Таким образом, $\frac{3}{5} < t < \frac{122}{49}$, то есть $\frac{3}{5} < \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{122}{49}$ и $\log_{\frac{3}{5}} \frac{122}{49} < x < 1$.

Значит, все $x \in \left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{122}{49}\right); 1\right)$ являются решениями исходного неравенства.

Ответ: а) $(\log_2 3; 2)$; б) $\{\log_2 3\} \cup [2; +\infty)$; в) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \log_2 3)$; г) $\left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{122}{49}\right); 1\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\frac{x^2-3}{3^x-5} > 0$;

2) $(x^2-2x-3)(2^x-8) \le 0$;

3) $\frac{3^x-27}{x^2-4x+4} \le 0$;

4) $\frac{64-4^x}{4x^2+12x+9} \ge 0$;

5) $\frac{2-3^x}{3^x-4} \le 3^{x-1}$;

6) $(2^x-3)(2\log_2 x - 1)\log_2^2 x < 0$.

Ответ: 1) $\left(-\sqrt{3};\ \log_3 5\right)\cup\left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$; 2) $(-\infty;\ -1]\cup\{3\}$; 3) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3]$; 4) $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(-1{,}5;\ 3]$; 5) $(-\infty;\ 1]\cup(\log_3 4;\ +\infty)$; 6) $\left[\sqrt{2};\ \log_2 3\right]$.

IV вид. Неравенства $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}>1$ и $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}<1$.

Неравенство $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}>1$ равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} f(x)>1, \\ \varphi(x)>0; \end{cases}$ или $\begin{cases} 0<f(x)<1, \\ \varphi(x)<0. \end{cases}$

Неравенство $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}<1$ равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} f(x)>1, \\ \varphi(x)<0; \end{cases}$ или $\begin{cases} 0<f(x)<1, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$

Пример.

Решить неравенства.

а) $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$;

б) $\left(x^2-8x+15\right)^{x-6}<1$.

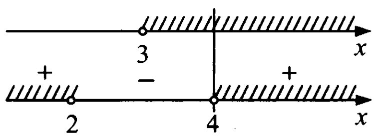
Решение.

а) Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x-2>1, \\ x^2-6x+8>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0<x-2>1, \\ x^2-6x+8<0. \end{cases}$

Решим первую систему:

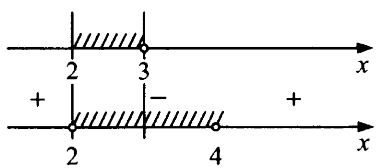
$\begin{cases} x>3, \\ (x-2)(x-4)>0; \end{cases}$



$x>4$.

Решим вторую систему:

$\begin{cases} 2<x<3, \\ (x-2)(x-4)<0; \end{cases}$



$2<x<3$.

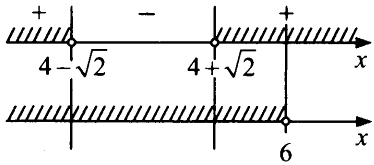
Множество решений неравенства: $(2;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$.

б) Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x^2-8x+15>1, \\ x-6<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0<x^2-8x+15<1, \\ x-6>0. \end{cases}$

Решим первую систему:

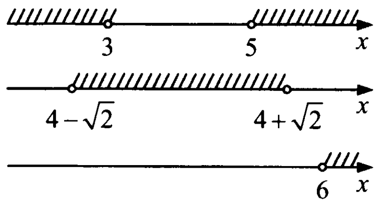
$$\begin{cases} x^2-8x+14>0, \\ x<6; \end{cases}$$



$x<4-\sqrt{2}$ или $4+\sqrt{2}<x<6$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x^2-8x+15>0, \\ x^2-8x+14<0, \\ x>6; \end{cases}$$



решений нет.

Множество решений исходного неравенства:

$\left(-\infty;\,4-\sqrt{2}\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\,6\right)$.

Ответ: 1) $(2;3)\cup(4;+\infty)$; 2) $\left(-\infty;\,4-\sqrt{2}\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\,6\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\left(x^2-6x+8\right)^{x-3}<1$;

2) $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1$;

3) $(x^2+x+1)^x<1$;

4) $\left(x^2+1\right)^{3x-1}\geq\left(x^2+1\right)^2$,

5) $|x|^{x^2-2x-3}<1$;

6) $\left(2\cdot3^{x-2}+3^{-x}\right)^{2-x}>1$.

Ответ: 1) $\left(-\infty;\,3-\sqrt{2}\right)\cup\left(4;\,3+\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(-\infty;\,1\frac{2}{3}\right)\cup(2;3)$;
3) $(-\infty\,-1)$; 4) $\{0\}\cup[1;+\infty)$; 5) $(1;3)$; 6) $(-\infty;\,\log_3 1{,}5)\cup(1;2)$.