Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Решение таких неравенств сводится к решению одной из систем, равносильной данному неравенству в области допустимых значений неизвестного:

$$\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{0,4}(2x-5) > \log_{0,4}(x+1)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < 0,4 < 1, \\ 2x-5 < x+1, \\ 2x-5 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x < 6, \\ x > 2,5, \end{cases} \text{ или } 2,5 < x < 6.$$

Ответ: (2,5; 6).

Пример 2. Решить неравенство $\log_5(3x-1) > \log_5(2x+3)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5 > 1, \\ 3x-1 > 2x+3, \\ 2x+3 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -1,5; \end{cases} \text{ откуда } x > 4.$$

Ответ: $(4; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_{0,4}(2x-5) > \log_{0,4}(x+1)$.

2. $\log_4(3x-1) > \log_4(2x+3)$.

3. $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$.

4. $\log_{0,3}(2x-4) > \log_{0,3}(x+1)$.

5. $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x)$.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(4x-7) > \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

Ответы: 1) (2,5; 6); 2) (4; $+\infty$); 3) (4; $+\infty$); 4) (2; 5); 5) (0; 1); 6) $(1\frac{3}{4}; 3)$.

Неравенства вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

Эти неравенства равносильны одной из систем:

$$\begin{cases} a > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

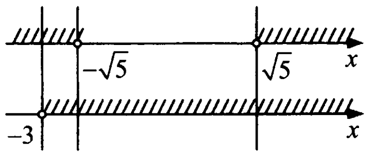
Решим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{0,1}\left(x^2 + x - 2\right) < \log_{0,1}(x+3)$.

Р е ш е н и е.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < 0,1 < 1, \\ x^2 + x - 2 > x + 3, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 > 5, \\ x > -3, \end{cases} \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} -3 < x < -\sqrt{5}, \\ x > \sqrt{5}. \end{array}\right.$$



О т в е т : $\left(-3; -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\log_{\sqrt{10}}(x+4) < \log_{\sqrt{10}}\left(x^2 - x - 20\right)$.

Р е ш е н и е.

Данное неравенство равносильно системе

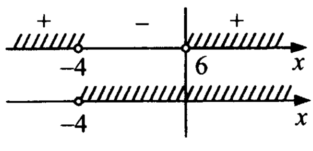
$$\begin{cases} \sqrt{10} > 1, \\ x^2 - x - 20 > x + 4, \\ x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 24 > 0, \\ x > -4. \end{cases}$$

Решим уравнение

$x^2 - 2x - 24 = 0;$

$x = 1 \pm 5.$

Поэтому $\begin{cases} (x+4)(x-6) > 0, \\ x > -4. \end{cases}$



О т в е т : $(6; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$.
2. $\log_{0,5}(x+4) < \log_{0,5}(x^2-x-20)$.
3. $\log_{0,4}(x+1) < \log_{0,4}(2x-5)$.
4. $\lg(3x-7) \le \lg(x+1)$.
5. $\log_2 \dfrac{5-12x}{12x-8} \le \log_2 x$.

Ответы: 1) $(\frac{1}{3};4)$; 2) $(5;\,6)$; 3) $(2{,}5;\,6)$; 4) $(2\frac{1}{3};4]$; 5) $\left(\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right]$.

Неравенства вида $\log_{g(x)}f(x) > a$ или $\log_{g(x)}f(x) < a$

Решение каждого из неравенств сводится к решению двух систем, равносильных данному неравенству в области допустимых значений неизвестного.

Для неравенства $\log_{g(x)} f(x) > a$ имеем:

$$\begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > (g(x))^a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ 0 < f(x) < (g(x))^a. \end{cases}$$

Для неравенства $\log_{g(x)} f(x) < a$ имеем:

$$\begin{cases} g(x) > 1, \\ 0 < f(x) < (g(x))^a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > (g(x))^a. \end{cases}$$

Решим далее несколько неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{x-3}\left(x^2-4x+3\right) < 0$.

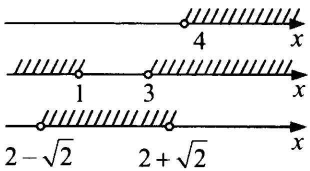
Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{а)} \begin{cases} x-3 > 1, \\ x^2-4x+3 > 0, \\ x^2-4x+3 < 1; \end{cases} \quad \text{или б)} \begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ x^2-4x+3 > 1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x > 4, \\ x^2-4x+3 > 0, \\ x^2-4x+2 < 0. \end{cases}$$



$x^2 - 4x + 3 = 0;$

$x_1 = 1$ или $x_2 = 3.$

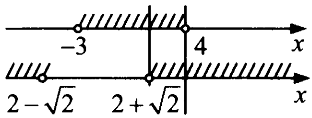
$x^2 - 4x + 2 = 0;$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}.$

Система решений не имеет.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x^2 - 4x + 2 > 0. \end{cases}$$



Откуда $2 + \sqrt{2} < x < 4.$

О т в е т : $(2 + \sqrt{2}; 4).$

Пример 2. Решить неравенство $\log_{x^2 - x - 5}(x + 2) > 0.$

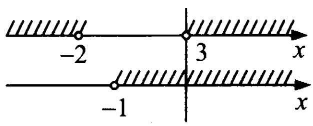
Р е ш е н и е .

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - x - 5 > 1, \\ x + 2 > 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x^2 - x - 5 < 1, \\ 0 < x + 2 < 1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x > -1; \end{cases}$$



$x^2 - x - 6 = 0;$

$D = 25;$

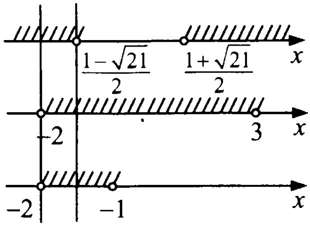
$x = 3$ или $x = -2.$

Следовательно, $x > 3.$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 0 < x^2 - x - 5 < 1, \\ 0 < x + 2 < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 5 > 0, \\ x^2 - x - 5 < 1, \\ -2 < x < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 5 > 0, \\ x^2 - x - 6 < 0, \\ -2 < x < -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(x - \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}\right) > 0, \\ (x - 3)(x + 2) < 0, \\ -2 < x < -1. \end{cases}$$



Следовательно, $-2 < x < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\left(-2; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\log_{x^2}(2+x) < 1$.
2. $\log_x \frac{2x+0,4}{5(1-x)} > 0$.
3. $\log_{x-1}(1+2x^4-x^6) > 0$.
4. $\log_{0,2x}(x^2-8x+16) \geq 0$.
5. $\log_x \frac{8-12x}{x-6} \geq 5$.

Ответы: 1) $(-2; -1)\cup(-1; 0)\cup(0; 1)\cup(2; +\infty)$; 2) $(0; \frac{23}{25})$; 3) $(1; \sqrt{2})$; 4) $[3; 4)\cup(4; 5)\cup(5; +\infty)$; 5) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)\cup[2; 6)$.

Неравенства, решаемые с помощью введения новой переменной

Пример 1. Решить неравенство $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$.

Решение.

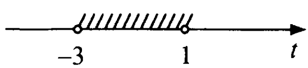
$\lg^2(-x) + 2\lg|x| - 3 < 0$. Так как по условию $x < 0$, то $|x| = -x$.

Следовательно, $\lg^2(-x) + 2\lg(-x) - 3 < 0$.

Пусть $\lg(-x) = t$, тогда неравенство примет вид:

$t^2 + 2t - 3 < 0$, $t^2 + 2t - 3 = 0$,

$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -3, \end{array}\right.$ $-3 < t < 1$.



Вернемся к переменной x:

$-3 < \lg(-x) < 1$,

$10^{-3} < -x < 10^{1}$, $0{,}001 < -x < 10$.

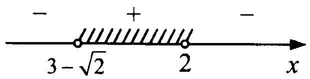
Ответ: $(-10; -0{,}001)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_2 \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > -1$.

Решение. Пусть $\log_2 \dfrac{x-1}{2-x} = y$, тогда неравенство примет вид $\log_2 y > -1$, откуда $y > 2^{-1}$, $y > \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, $\log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > \dfrac{1}{2}$, откуда $\dfrac{x-1}{2-x} > 2^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{x-1}{2-x} > \sqrt{2},\quad \frac{x-1}{2-x} - \sqrt{2} > 0,\quad \frac{x\left(1+\sqrt{2}\right)-1-2\sqrt{2}}{2-x} > 0.$$



Решениями этого неравенства будут все значения x из промежутка $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} < x < 2$.

Упростим выражение

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4}{1-2} = 3-\sqrt{2}.$$

Ответ: $(3-\sqrt{2}; 2)$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{\lg^2 x - \lg x - 4}{\lg x - 1} > 1$.

Решение.

Пусть $\lg x = a$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{a^2-a-4}{a-1} > 1,\quad \frac{a^2-a-4}{a-1} - 1 > 0,\quad \frac{a^2-2a-3}{a-1} > 0,\quad \frac{(a+1)(a-3)}{a-1} > 0.$$

Таким образом, $-1 < a < 1$ или $a > 3$.

Возвращаясь к переменной x, получим:

$-1 < \lg x < 1$ или $\lg x > 3$;

$0{,}1 < x < 10$ или $x > 1000$.

Решением данного неравенства будут все значения x из промежутка $(0{,}1;\ 10)$ и все значения x из промежутка $(1000; +\infty)$.

Ответ: $(0{,}1; 10) \cup (1000; +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0.$

2. $\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 \geq 0.$

3. $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \dfrac{1}{2}.$

4. $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \dfrac{5}{2}.$

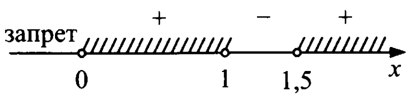
5. $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$

Ответы: 1) $(-10; -0{,}001)$; 2) $[0{,}25; 1) \cup [2; +\infty)$; 3) $(0; 0{,}5) \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$; 4) $(0; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$; 5) $(0; 2) \cup (4; +\infty)$.

Неравенства, решаемые методом интервалов

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{2x-3}{\log_2 x} > 0.$

Решение. Решим данное неравенство на области допустимых значений: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$



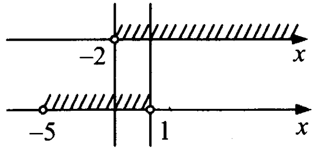
Ответ: $(0; 1) \cup (1{,}5; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{\log_{0,1}(x+2)}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} \leq 0.$

Решение. Найдем область допустимых значений:

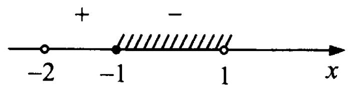
$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 5 - 4x - x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2, \\ x^2 + 4x - 5 < 0; \end{cases}$$



Областью допустимых значений являются все значения x из интервала $(-2; 1)$.

Числитель дроби обращается в ноль при $x = -1$, так как $\log_{0,1}(-1+2) = \log_{0,1} 1 = 0$.



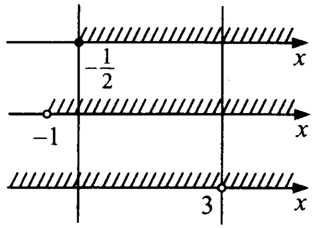
Если $x = 0$, то $\frac{\log_{0,1} 2}{\sqrt{5}} < 0$.

Ответ: $[-1; 1)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2x+1}}{2+\log_{0,5}(x+1)} \geq 0$.

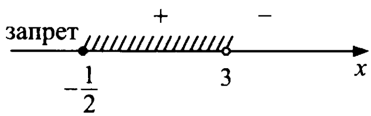
Решение. Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ x+1 > 0, \\ 2+\log_{0,5}(x+1) \neq 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ x > -1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



ОДЗ: $\left[-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Решим неравенство методом интервалов на ОДЗ.



Если $x = 7$, то $\log_{0,5} 8 = -3$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 3\right)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\frac{\sqrt{x+3}}{\log_4 x^2} \geq 0$.

2. $\frac{2x-3}{\log_2 x} > 0$.

3. $\frac{3x-2}{\log_{0,5} x} < 0$.

4. $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leq 0$.

5. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$.

Ответы: 1) $[-3; -1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(0; 1) \cup (1,5; +\infty)$; 3) $(0; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$; 4) $[\log_3 0,9; 2)$; 5) $(4+\sqrt{2}; +\infty) \cup \{5\}$.