МАТЕМАТИКА

Комбинаторика

Готовимся к ЕГЭ вместе!
vk.com/ege100ballov

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика — раздел математики о выборе и размещении элементов некоторого множества на основании каких-либо условий. Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называют ***соединениями***

Перестановки

Определение. ***Перестановками из n элементов*** называют различные конечные упорядоченные множества (т. е. такие множества, для которых указан порядок размещения их элементов), которые можно получить из некоторого множества, содержащего n элементов. Если все элементы данного множества различны, получаем ***перестановки без повторений***, а если элементы могут повторяться, то ***перестановки с повторениями***

Формулы для числа перестановок (P_n)

Без повторений	С повторениями
$\boxed{P_n = n!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается: «эн факториал»). Для $n = 0$ $0! = 1$ (по определению)	$\boxed{\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}}$ где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$
Пример. Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторяя эти цифры в одном числе, равно $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$	**Пример.** Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из трех двоек, двух семерок и одной пятерки, $\tilde{P}_6 = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 60$ (учтено, что $3 + 2 + 1 = 6$)

Размещения

Определение. ***Размещением из n элементов по k*** называют любое упорядоченное множество из k элементов, составленное из элементов n-элементного множества. Если выбранные элементы не повторяются, то получаем ***размещение без повторений***, а если повторяются, то ***размещение с повторениями***

Формулы для числа размещений $\left(A_n^k\right)$

без повторений	с повторениями
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$
Пример. Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться, $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$	**Пример.** Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе могут повторяться, $\tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$

Сочетание

без повторений	с повторениями
Определение. ***Сочетанием без повторений из n элементов по k*** называют любое k-элементное подмножество n-элементного множества	**Определение.** Пусть есть n элементов (не обязательно различных) данного множества. ***Сочетаниями из n элементов по k*** называют наборы этих элементов, в каждый из которых входит k элементов и которые отличаются только составом элементов (хотя бы одним элементом)

Формулы для числа сочетаний $\left(C_n^k\right)$

без повторений	с повторениями
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (по определению считают, что $C_n^0 = 1$)	$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Пример. Из 25 учащихся в классе можно выделить 5 человек для дежурства по школе C_{25}^5 способами, т. е. $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$ способами	**Пример.** Если в продаже имеются цветы четырех сортов, то различных букетов, состоящих из 7 цветков, можно составить $\bar{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ способами

Некоторые свойства числа сочетаний без повторений

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (в частности, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)	2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
	3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Бином Ньютона (см. также табл. 14)

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n}$$

Так как $1 = C_n^0 = C_n^n$ и $b^0 = 1$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$,

то формулу бинома Ньютона можно записать еще и так:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n.$$

Общий член этого разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Коэффициенты C_n^k называются ***биномиальными коэффициентами***

Свойства биномиальных коэффициентов

1. Число биномиальных коэффициентов (а следовательно, и число слагаемых в разложении степени бинома) равно $n + 1$.
2. Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой (так как $C_n^m = C_n^{n-m}$).
3. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.
4. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.
5. Для вычисления биномиальных коэффициентов можно пользоваться треугольником Паскаля (см. табл. 14), в котором вычисление коэффициентов основывается на формуле $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Натуральная степень разности двух величин

Если в формуле бинома Ньютона заменить b на $-b$, то получим

$$\boxed{(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^n b^n}$$

Например, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$

СХЕМА РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Выбор правила

Правило суммы	Правило произведения
Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A **или** B можно выбрать $(m + n)$ способами	Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A **и** B можно выбрать $(m \cdot n)$ способами

Выбор формулы

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Да → **Все ли элементы входят в соединение?**

- Да → Перестановки
- Нет → Размещения

Нет → Сочетания

Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\bar{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\bar{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Таблица 86

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Определение	Примеры
Случайные эксперименты и случайные события	
Событие, которое может произойти, а может и не произойти в ходе наблюдения или эксперимента в одних и тех же условиях, называют ***случайным событием*** (а сам эксперимент — случайным ***экспериментом***)	Выпадение «герба» и выпадение «числа» при подбрасывании монеты; выигрыш в лотерею, выпадение определенного количества очков при бросании игрального кубика и т. д.
Частота и относительная частота случайного события	
Если при неизменных условиях проведен n раз случайный эксперимент и в $n(A)$ случаях произошло событие A, то число $n(A)$ называют ***частотой события A***	Событие A — выпадение «герба» при подбрасывании монеты.
Относительной частотой случайного события называют отношение числа $n(A)$ появлений этого события к общему числу n проведенных экспериментов: $\dfrac{n(A)}{n}$	

Экспериментаторы	Бюффон	Пирсон	Феллер
Число экспериментов n	4040	24 000	10 000
Частота события $n(A)$	2048	12 012	4979
Относительная частота $\dfrac{n(A)}{n}$	0,5069	0,5005	0,4979

Статистическое определение вероятности

Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты близко к некоторому определенному числу, то это число называют ***вероятностью случайного события*** A и обозначают $P(A)$. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$	Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты. $P(A) = 0{,}5$

Достоверные и невозможные события

Достоверное событие — это событие U, которое обязательно происходит при каждом повторении эксперимента. $P(U) = 1$	Выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков)
Невозможное событие (его часто обозначают $\varnothing$) — это событие, которое в данном эксперименте наступить не может. $P(\varnothing) = 0$	Выпадение 7 очков при бросании игрального кубика

Классическое определение вероятности

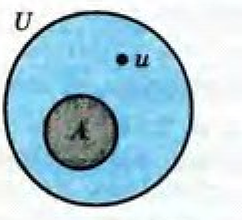
*Для **равновозможных элементарных событий*** (то есть событий, вероятность которых одинакова) ***вероятность события A — это отношение количества элементарных событий (m), благоприятствующих этому событию, к количеству всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте (n):*** $P(A) = \frac{m}{n}$	**Пример.** Найдите вероятность выпадения числа очков, кратного трем, при бросании игрального кубика. *Решение.* Рассмотрим как элементарные события шесть равновозможных результатов бросания кубика — выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (события попарно несовместимы, и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий, следовательно, в этой задаче $n = 6$). Событие A — выпало число очков, кратное трем. Благоприятствуют событию A только два элементарных события — выпало 3 или 6 очков (то есть $m = 2$). Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Геометрическое определение вероятности

Основные понятия

U — некоторая фигура на площади, $S(U)$ — площадь фигуры U.

Эксперимент — это случайный выбор какой-то точки u из фигуры U (можно также представить, что эту точку u случайно бросили на фигуру U).



Элементарные события u — точки фигуры U.

A — часть фигуры U ($A \subseteq U$); $S(A)$ — площадь фигуры A.

Событие A — попадание точек u в фигуру A. Тогда *элементарными событиями, благоприятствующими событию A, будут все точки фигуры A.* (Предполагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры U пропорциональна площади этой части и не зависит от ее конфигурации и расположения в фигуре U.)

Определение геометрической вероятности

$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$	***Геометрической вероятностью события*** A называют отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры