$x = 2.$

Область определения состоит из одного числа — $x = 2$. Проверка показывает, что $x = 2$ — корень уравнения.

О т в е т : 2.

Упражнения для самостоятельного решения

1) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4;$
2) $\sqrt{3+x}=3-x;$
3) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-1}}-2\cdot\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}}=1;$
4) $\sqrt{(x-1)^2(x-4)}=|x-1|\sqrt{16-x^2};$
5) $x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=4;$
6) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4};$
7) $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1.$

Ответы:

1) 2;
2) 0;
3) 2,5;
4) 1; 4;
5) 1;
6) 2;
7) [3; 8].

Иррациональные неравенства

Иррациональными неравенствами, называются неравенства, в которых неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаками радикалов. При решении иррациональных неравенств следует помнить, что неравенство можно возводить в квадрат лишь в том случае, когда обе части неотрицательны. Необходимо учитывать допустимые значения переменной, так как проверка подстановкой в неравенствах невозможна из-за бесконечного множества решений. Рассмотрим некоторые виды иррациональных неравенств и методы их решения.

Полезно помнить, что неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \ge \varphi(x)$ равносильно совокупности систем $\begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \ge (\varphi(x))^{2n} \end{cases}$ или $\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$

Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \le \varphi(x)$ равносильно системе $\begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \le (\varphi(x))^{2n}, \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$

Рассмотрим некоторые виды иррациональных неравенств.

I. Простейшие иррациональные неравенства

Пример.

Решить неравенства.

а) $\sqrt{x-2} > 3$; б) $\sqrt{x-2} < 3$; в) $\sqrt{x-2} > -3$; г) $\sqrt{x-2} < -3$.

Решение.

а) $\sqrt{x-2} > 3$; $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 > 3^2$; $x-2>9$; $x>11$.

б) $\sqrt{x-2} < 3$;

$\begin{cases} \left(\sqrt{x-2}\right)^2 < 3^2, \\ x-2 \ge 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 11, \\ x \ge 2; \end{cases}$

$2 \le x < 11$.

в) $\sqrt{x-2} > -3$;

$x-2 \ge 0$;

$x \ge 2$.

г) $\sqrt{x-2} < -3$,

решений нет, то есть неотрицательная левая часть не может быть меньше отрицательного числа.

Ответ: а) $x > 11$; б) $2 \le x < 11$; в) $x \ge 2$; г) решений нет.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\sqrt{x+3} \geq 5$, 5) $\sqrt{4-x} > 7$, 9) $\sqrt{x^2+8x-5} < 2$,

2) $\sqrt{x+3} \leq 5$, 6) $\sqrt{4-x} < 7$, 10) $\sqrt{x^2+8x-5} > 2$,

3) $\sqrt{x+3} \geq -5$, 7) $\sqrt{4-x} > -7$, 11) $\sqrt{x^2+8x-5} > -2$,

4) $\sqrt{x+3} \leq -5$, 8) $\sqrt{4-x} < -7$, 12) $\sqrt{x^2+8x-5} < -2$.

Ответ: 1) $[22; +\infty)$; 2) $[-3; 22]$; 3) $[-3; +\infty)$; 4) решений нет; 5) $(-\infty; -45)$;

6) $(-45; 4]$; 7) $(-\infty; 4]$; 8) решений нет;

9) $\left(-9; -4-\sqrt{21}\right] \cup \left[-4+\sqrt{21}; 1\right)$;

10) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$; 11) $\left(-\infty; -4-\sqrt{21}\right] \cup \left[-4+\sqrt{21}; +\infty\right)$;

12) решений нет.

II. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \varphi(x)$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (\varphi(x))^{2n} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \varphi(x) < 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример.

Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} - 3 - x > 0$.

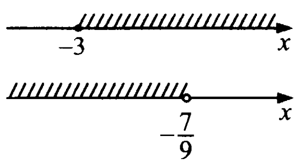
Решение.

$\sqrt{x^2-3x+2} > 3 + x$. Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\text{а) } \begin{cases} 3+x \geq 0, \\ x^2-3x+2 > (3+x)^2 \end{cases} \text{ или б) } \begin{cases} 3+x < 0, \\ x^2-3x+2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности.

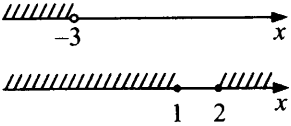
$$\begin{cases} x \geq -3, \\ -9x > 7, \end{cases}$$



$x \in \left[-3; -\frac{7}{9}\right)$

Решим вторую систему.

$$\begin{cases} x < -3, \\ (x-1)(x-2) \ge 0, \end{cases}$$



$x \in (-\infty; -3)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\sqrt{1+4x-x^2} > x-2$,

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x} \ge x - \frac{2}{5}$,

3) $\sqrt{x^2-10x+16} > 2x+4$,

4) $\sqrt{x^2+2x-8} > 12-2x$.

Ответ: 1) $\left[2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{2{,}5}\right)$;

2) $\left[0; \frac{4}{5}\right]$; 3) $(-\infty; 0]$;

4) $(4; +\infty)$.

III. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} \ge \varphi(x)$

Неравенство равносильно системе $\sqrt[2n]{f(x)} \le \varphi(x)$.

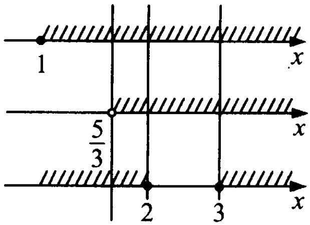
$$\begin{cases} \varphi(x) \ge 0 \\ f(x) \le (\varphi(x))^{2n} \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$$

Пример.

Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} < x-1$.

Данное неравенство равносильно системе.

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-5x+6<(x-1)^2, \\ x^2-5x+6\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ 3x>5, \\ (x-2)(x-3)\ge 0, \end{cases}$$



Ответ: $\left(\frac{5}{3};\, 2\right]\cup[3;\, +\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\sqrt{x^2-10x+16}<2x+4$;
2) $\sqrt{x^2+2x-8}<12-2x$;
3) $\sqrt{x^2-5x+6}\le x-2$;
4) $\sqrt{x-3}<5-x$;
5) $\sqrt{x^2-5x+4}<\sqrt{4-x}$.

Ответ: 1) $(0;\, 2]\cup[8;\, +\infty)$; 2) $(-\infty;\, -4]\cup[2;\, 4)$;
3) $[3;\, +\infty)\cup\{2\}$; 4) $[3;\, 4)$ 5) $(0;\, 1]$.

IV. Иррациональные неравенства, решаемые методом интервалов

При решении иррациональных неравенств можно также применять метод интервалов. Этот метод основан на следующем утверждении.

Если функция f на интервале $(a;\, b)$ непрерывна и не обращается в ноль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пример 1.

Решить неравенство $\dfrac{4x^2-8x-5}{\sqrt{3x^2-6x}}\le\dfrac{2x+1}{3}$.

Р е ш е н и е .

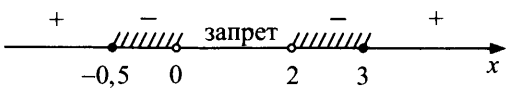
Область определения неравенства: $3x^2 - 6x > 0$, $x(x - 2) > 0$,
$\left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2. \end{array}\right.$

На области определения исходное неравенство равносильно следующему:

$$(2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x(x-2)}\right) \le 0.$$

Для решения этого неравенства применим метод интервалов. Рассмотрим функцию $f(x) = (2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x(x-2)}\right)$. Решив уравнение $f(x) = 0$, находим нули функции: $-0{,}5$; 3.

На каждом из промежутков $(-\infty; -0{,}5)$, $(-0{,}5; 0)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в ноль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак.



О т в е т : $[-0{,}5; 0) \cup (2; 3]$.

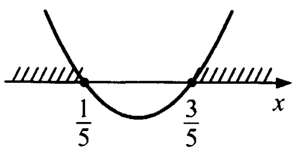
Пример 2.

Решить неравенство $(3x^2 - 4x + 1)\sqrt{25x^2 - 20x + 3} \le 0$.

Р е ш е н и е .

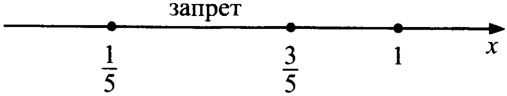
Найдем область определения данного неравенства.

$25x^2 - 20x + 3 \ge 0$

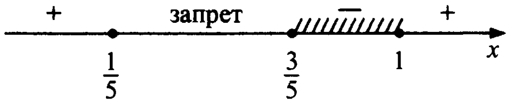


, $\left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{5}, \\ x \ge \frac{3}{5}. \end{array}\right.$

Нули функции $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)\sqrt{25x^2 - 20x + 3}$ найдем из уравнения $f(x) = 0$: $x = 1$; $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{3}{5}$. Отметим на числовой прямой нули функции, учитывая область определения неравенства.



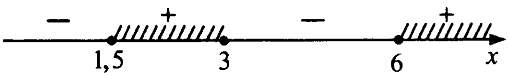
На каждом из промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5}; 1\right)$, $(1; +\infty)$ функция f непрерывна и не обращается в ноль. Следовательно, на каждом из них она сохраняет постоянный знак.



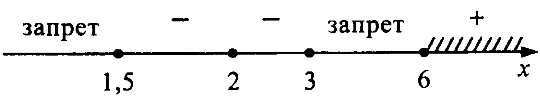
О т в е т : $\left[\frac{3}{5}; 1\right] \cup \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Пример 3. Решить неравенство
$(x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)} \geq 0.$

Р е ш е н и е . Найдем область определения неравенства:
$(2x-3)(x-3)(x-6) \geq 0.$



Нули функции $f(x) = (x-1)(x-2)^4(x-5)\sqrt{(2x-3)(x-3)(x-6)}$ найдем, решив уравнение $f(x) = 0$: $x = 2$; $x = 1{,}5$; $x = 3$; $x = 6$.



О т в е т : $[6; +\infty) \cup \{1{,}5; 2; 3\}$.

Пример 4.

Решить неравенство $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2.$

Р е ш е н и е .

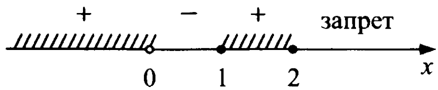
Область определения неравенства: $\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 0 < x \leq 2. \end{array}\right.$

Преобразуем исходное неравенство к виду: $\frac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x} \geq 0.$

Функция $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x}$ имеет нули: $\sqrt{2-x} = 3-2x$,
$2 - x = 9 - 12x + 4x^2$;

$$4x^2-11x+7=0;\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\frac{7}{4}\ \text{(посторонний корень)}. \end{array}\right.$$

Отметим нули функции на области определения неравенства и определим знаки функции f на получившихся интервалах:



Ответ: $(-\infty;\,0)\cup[1;\,2]$.

Пример 5.

Решить неравенство $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$.

Решение.

$(x-3)\sqrt{x^2-4}-(x-3)(x+3)\le 0;$

$(x-3)\left(\sqrt{x^2-4}-x-3\right)\le 0.$

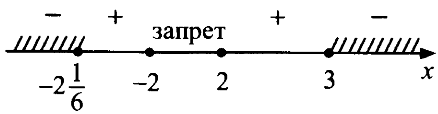
Найдем область определения неравенства:

$$x^2-4\ge 0,\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2, \\ x\le -2. \end{array}\right.$$

Найдем нули функции $f(x)=(x-3)\left(\sqrt{x^2-4}-x-3\right)$:

$$f(x)=0 \text{ при } \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2\frac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Отметим на числовой прямой (на области определения) нули функции f и определим знаки функции на полученных промежутках:



Ответ: $\left(-\infty;\,-2\frac{1}{6}\right]\cup[3;\,+\infty)\cup\{-2;\,2\}$.

Пример 6.

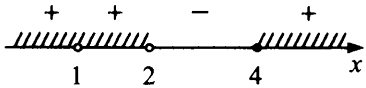
Решить неравенство

$$\frac{(x-3)(x-5)}{1-x}\cdot\sqrt{\frac{x-4}{x-2}}\le 0.$$

Решение.

Область определения неравенства:

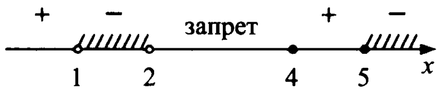
$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-2} \ge 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$$



$$\left[\begin{aligned} &1 < x < 2, \\ &x < 1, \\ &x \ge 4. \end{aligned}\right.$$

Нули функции $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-5)}{1-x} \cdot \sqrt{\dfrac{x-4}{x-2}}$ на области определения: $x = 5, x = 4$.

Отметим на числовой прямой (на области определения) нули функции f и определим знаки функции на полученных промежутках:



Ответ: $(1; 2) \cup [5; +\infty) \cup \{4\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $(x-3)(x-5)\sqrt{x^2-10x+24} \le 0$

Ответ: $3 \le x \le 4, x = 6$.

2) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-6x+5}\sqrt{x+9} \le 0$

Ответ: $1 < x < 5, x = -9$.

3) $\left(x^2-7x+10\right)\left(\sqrt{7-2x}-x-4\right) > 0$

Ответ: $x < -1; 2 < x \le 3{,}5$.

4) $\dfrac{x-3\cdot\sqrt{x-2}}{x^2-6x-27} \le 0$

Ответ: $2 \le x \le 3; 6 \le x < 9$.

5) $\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \ge \dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$

Ответ: $-1 \le x \le 0; x = 4$.

6) $\left(|x|-1\right)\sqrt{-x^2+x+6} \le 0$

Ответ: $[-1; 1] \cup \{-2; 3\}$.

V вид. Иррациональные неравенства, решаемые методом подстановки

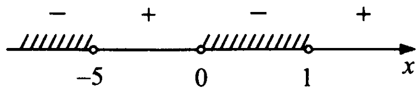
Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}+4<5\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{2x+1}}$.

Р е ш е н и е.

Пусть $\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}=t$, тогда неравенство примет вид:

$$t+4<\frac{5}{t},\ \frac{t^2+4t-5}{t}<0,\ \frac{(t-1)(t+5)}{t}<0.$$



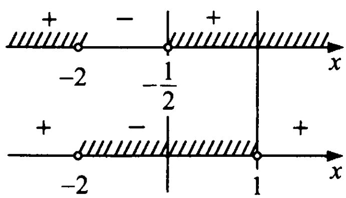
Следовательно, $t<-5$ или $0<t<1$.

Получим неравенства (1): $\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}<-5$

или (2): $0<\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{x+2}}<1$.

Неравенство (1) не имеет решений. Решим второе неравенство:

$$(2):\quad 0<\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x+2}}<1,\ 0<\frac{2x+1}{x+2}<1,\ \begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2}>0,\\ \dfrac{2x+1}{x+2}<1;\end{cases}\ \begin{cases}\dfrac{2x+1}{x+2}>0,\\ \dfrac{x-1}{x+2}<0.\end{cases}$$



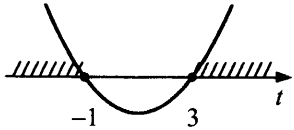
О т в е т: $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\dfrac{2x+1}{x}-2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}\geq 3$.

Р е ш е н и е.

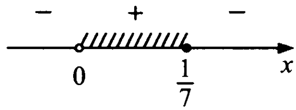
Пусть $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}=t$, тогда неравенство примет вид: $t^2-2t-3\geq 0$.



$t \le -1$ или $t \ge 3$.

$\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}} \le -1$ не имеет решений.

$\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}} \ge 3,\ \dfrac{2x+1}{x} \ge 9,\ \dfrac{1-7x}{x} \ge 0$



О т в е т : $\left(0; \dfrac{1}{7}\right]$.

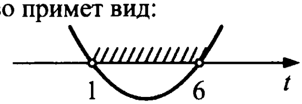
Пример 3.

Решить неравенство $2x^2 - 3x + 7 < 7\sqrt{(2x-1)(x-1)}$.

Р е ш е н и е .

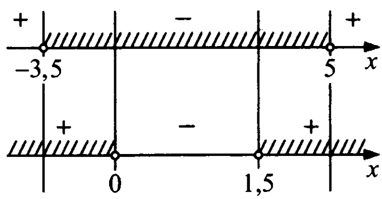
$\sqrt{(2x-1)(x-1)} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$. Пусть $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = t$, тогда $2x^2 - 3x + 1 = t^2$ и исходное неравенство примет вид:

$t^2 - 7t + 6 < 0$



Таким образом, $1 < t < 6$, то есть $1 < \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 6$, откуда $1 < 2x^2 - 3x + 1 < 36$.

Имеем: $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 35 < 0, \\ 2x^2 - 3x > 0. \end{cases}$



О т в е т : $(-3{,}5; 0) \cup (1{,}5; 5)$.

Пример 4.

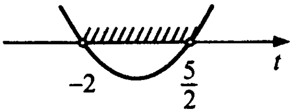
Решить неравенство $\sqrt{7 - \log_2(x-1)^2} + \log_2(x-1)^4 > 4$.

Р е ш е н и е .

Пусть $\sqrt{7 - \log_2(x-1)^2} = t$, тогда $\log_2(x-1)^2 = 7 - t^2$;

$2\log_2(x-1)^2=14-2t^2$, то есть $\log_2(x-1)^4=14-2t^2$.

Исходное неравенство примет вид: $2t^2-t-10<0$.



Значит, $-2<t<\frac{5}{2}$, то есть $-2<\sqrt{7-\log_2(x-1)^2}<\frac{5}{2}$,

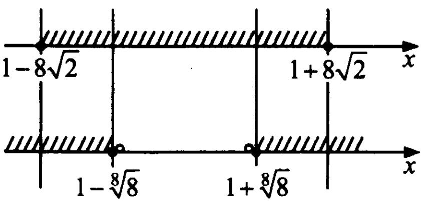
$$\begin{cases}7-\log_2(x-1)^2<\frac{25}{4},\\7-\log_2(x-1)^2\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_2(x-1)^2>\frac{3}{4},\\\log_2(x-1)^2\le 7.\end{cases}$$

Таким образом, $\frac{3}{4}<\log_2(x-1)^2\le 7$, $\frac{3}{4}<2\log_2|x-1|\le 7$;

$\frac{3}{8}<\log_2|x-1|\le\frac{7}{2}$; $2^{\frac{3}{8}}<|x-1|\le 2^{\frac{7}{2}}$; $\begin{cases}|x-1|\le 2^{\frac{7}{2}},\\|x-1|>2^{\frac{3}{8}};\end{cases}$ $\begin{cases}-2^{\frac{7}{2}}\le x-1\le 2^{\frac{7}{2}},\\\left[\begin{array}{l}x-1>2^{\frac{3}{8}}\\x-1<-2^{\frac{3}{8}};\end{array}\right.\end{cases}$

$\begin{cases}1-2^{\frac{7}{2}}\le x\le 1+2^{\frac{7}{2}},\\\left[\begin{array}{l}x>1+2^{\frac{3}{8}}\\x<1-2^{\frac{3}{8}};\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}1-8\sqrt{2}\le x\le 1+8\sqrt{2},\\\left[\begin{array}{l}x>1+\sqrt[8]{8},\\x<1-\sqrt[8]{8}.\end{array}\right.\end{cases}$



О т в е т: $\left[1-8\sqrt{2};1-\sqrt[8]{8}\right)\cup\left(1+\sqrt[8]{8};1+8\sqrt{2}\right]$.

Пример 5.

Решить неравенство $\sqrt{1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)}<\log_5\left(5x^2-20x+25\right)$.

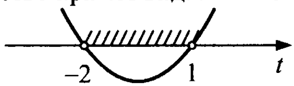
Решение.

Пусть $\sqrt{1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)}=t$, тогда $\log_5\left(x^2+4x+5\right)=1-t^2$ и

$\log_5\left(5x^2-20x+25\right)=\log_5 5\left(x^2-4x+5\right)=$

$=1+\log_5\left(x^2-4x+5\right)=2-t^2.$

Исходное неравенство примет вид: $t<2-t^2$ или $t^2+t-2<0$.



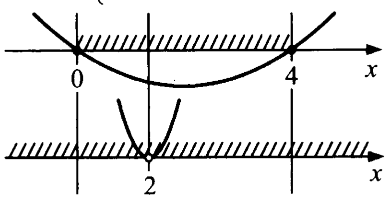
Таким образом, $-2<t<1$ или $-2<\sqrt{1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)}<1$.

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)<1,\\ 1-\log_5\left(x^2-4x+5\right)\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\log_5\left(x^2-4x+5\right)>0,\\ \log_5\left(x^2-4x+5\right)\leq 1.\end{cases}$$

Таким образом, $0<\log_5\left(x^2-4x+5\right)\leq 1$,

$1<x^2-4x+5\leq 5$ или $\begin{cases}x^2-4x\leq 0,\\ x^2-4x+4>0.\end{cases}$



Ответ: $[0;2)\cup(2;4]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $x^2-5x+6<3\sqrt{(x-1)(x-4)}$

Ответ: $0<x<\frac{5-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}<x<5$.

2) $3^x-1<\sqrt{9^x-3^x-2}$ Ответ: $x>1$.

3) $\sqrt{\log_4\left(-4+8x-2x^2\right)} > \log_2\left(-2+4x-x^2\right)$

Ответ: $2-0{,}5\sqrt{6} \le x < 2;\ 2 < x \le 2+0{,}5\sqrt{6}.$

4) $2^x - 1 \ge \sqrt{4^x + 2^{x+1} - 3}$

Ответ: $x = 0.$

5) $\log_2 \frac{4}{x} - 2\sqrt{\log_2 \sqrt{x}} + 2 < 0$

Ответ: $x > 4.$

VI. Тригонометрия и иррациональность

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{1-2\sin x} \ge \cos x.$

Решение.

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ 1-2\sin x \ge \cos^2 x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x < 0, \\ 1-2\sin x \ge 0. \end{cases}$

Решим систему а).

$\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \left(1-\cos^2 x\right) - 2\sin x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \sin^2 x - 2\sin x \ge 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \sin x\left(\sin x - 2\right) \ge 0. \end{cases}$

Так как $\sin x - 2 < 0$ всегда, то $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \sin x \le 0. \end{cases}$

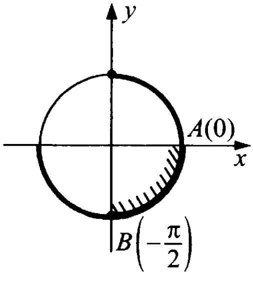


Рис. 37

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le 2\pi n,\ n \in Z$ — решения системы а).

Решим систему б).

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

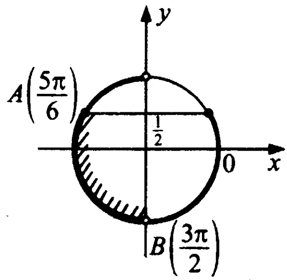


Рис. 38

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ — решения системы б).

Ответ:

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 2.

Решить неравенство: $\sqrt{10\sin x - 5} \ge -\sqrt{3}\cos x$.

Решение.

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} \cos x \le 0, \\ 10\sin x - 5 \ge 3\cos^2 x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x > 0, \\ 10\sin x - 5 \ge 0. \end{cases}$

Решим систему а):

$$\begin{cases} \cos x \le 0, \\ 10\sin x - 5 \ge 3 - 3\sin^2 x; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \le 0, \\ 3\sin^2 x + 10\sin x - 8 \ge 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \le 0, \\ \sin x \ge \frac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x \le 0, \\ \sin x < -4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вторая система из последней совокупности не имеет решений. С помощью тригонометрической окружности найдем решение системы

$$\begin{cases} \cos x \le 0, \\ \sin x \ge \frac{2}{3}. \end{cases}$$

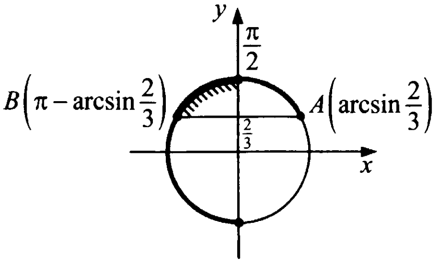


Рис. 39

Решение системы а): $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решим систему б).

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

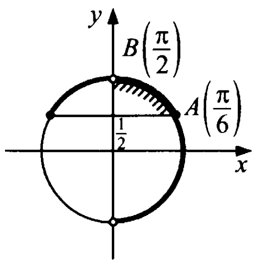


Рис. 40

Решение системы б): $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

О т в е т : $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\sqrt{4\cos x - 2} \ge -\sqrt{3}\sin x$

О т в е т : $-\arccos\frac{\sqrt{19}-2}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $\sqrt{1+\cos x} \le \sin x$

О т в е т : $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

3) $\sqrt{1+3\cos x} \ge \sin x$

О т в е т : $2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n \le x < 2\pi n,\ n \in Z.$

4) $\sqrt{1-2\sin x} \ge \cos x$

О т в е т : $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le 2\pi n;\ -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{-\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

VII. Иррациональные неравенства, содержащие несколько радикалов

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$

Р е ш е н и е .

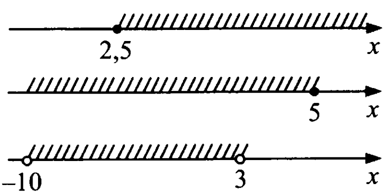
Область определения неравенства определяется системой

$$\begin{cases} x+6 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \quad \text{откуда } x \ge 2{,}5. \\ 2x-5 \ge 0, \end{cases}$$

Обе части неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно системе $\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x+6 > x+1+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x-5}+2x-5, \end{cases}$

то есть системе $\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ \sqrt{2x^2-3x-5} < 5-x. \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ 5-x \ge 0, \\ 2x^2-3x-5 < (5-x)^2, \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x \le 5, \\ 2x^2-3x-5 < 25-10x+x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x \le 5, \\ x^2+7x-30 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2{,}5, \\ x \le 5, \\ -10 < x < 3. \end{cases}$$



О т в е т : $[2{,}5; 3)$.

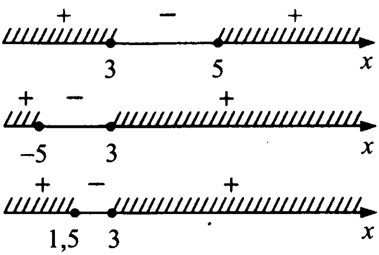
Пример 2.

Решить неравенство $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

Р е ш е н и е .

Найдем область определения данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2-8x+15\ge 0, \\ x^2+2x-15\ge 0, \\ 4x^2-18x+18\ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x-5)\ge 0, \\ (x+5)(x-3)\ge 0, \\ 4(x-3)(x-1{,}5)\ge 0. \end{cases}$$



Область определения состоит из $x=3$, $x\le -5$ и $x\ge 5$. При $x=3$ обе части исходного неравенства равны нулю, поэтому число $x=3$ не является его решением. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}. \end{cases}$$

Обе части иррационального неравенства неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат и упрощений получим равносильную систему

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ \sqrt{x^2-8x+15}\cdot\sqrt{x^2+2x-15}>(x-3)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ \sqrt{(x-3)(x+5)}\cdot\sqrt{(x-3)(x-5)}>(x-3)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ \sqrt{(x-3)^2(x^2-25)}>(x-3)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x|\ge 5, \\ (x-3)^2(x^2-25)>(x-3)^4. \end{cases}$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |x| \geq 5, \\ x^2 - 25 > (x-3)^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| \geq 5, \\ x > \dfrac{17}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{17}{3}; +\infty\right)$.

Пример 3.

Решить неравенство $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-5} < \sqrt{4x-7} + \sqrt{5x-9}$.

Решение. Область определения неравенства $x \geq 1{,}8$.

Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-9} < \sqrt{4x-7} - \sqrt{3x-5} \qquad (*)$$

Поскольку $2x - 3 \geq 5x - 9$ при $x \leq 2$, $4x - 7 \geq 3x - 5$ при $x \geq 2$, то область определения исходного неравенства целесообразно разбить на два множества: $1{,}8 \leq x \leq 2$ и $x > 2$, и на каждом из них решить неравенство (*). Если $1{,}8 \leq x \leq 2$, то справедливы неравенства $\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-9} \geq 0$ и $\sqrt{4x-7} - \sqrt{3x-5} \leq 0$, поэтому неравенство (*), а следовательно, и исходное неравенство решений не имеют.

Если $x > 2$, то $\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-9} < 0$ и $\sqrt{4x-7} - \sqrt{3x-5} > 0$, поэтому любое значение $x > 2$ является решением неравенства (*), а следовательно, и исходного неравенства.

Ответ: $x > 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства.

1) $\sqrt{9-3x} + \sqrt{4-x} > \sqrt{2x+25}$

Ответ: $-12{,}5 \leq x < 0$.

2) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x-3} > \sqrt{x}$

Ответ: $\dfrac{3}{4} \leq x < 1$.

3) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$

Ответ: $x > 1$.

4) $\sqrt[6]{2x-4} + \sqrt[3]{x+6} \geq 2 - \sqrt{2-x}$

Ответ: $x = 2$.

5) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} > \sqrt{x}$

Ответ: $0 \leq x < 1$.