14 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

14.1. Показательные неравенства

Методы решений показательных неравенств:

1. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ $(\leq, >, \geq)$, то:

а) при условии, что $a > 1$ получим $f(x) < g(x)$;

б) при условии, что $0 < a < 1$ получим $f(x) > g(x)$.

2. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < g(x)$, то:

а) при $a > 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) < \log_a g(x)$;

б) при $a > 1$ и $g(x) < 0$ получим $x \in \varnothing$;

в) при $0 < a < 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) > \log_a g(x)$;

г) при $0 < a < 1$ и $g(x) < 0$ получим $x \in \varnothing$.

3. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} > g(x)$, то:

а) при $a > 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) > \log_a g(x)$;

б) при $a > 0$ и $g(x) < 0$ получим $x \in D(f)$;

в) при $0 < a < 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) < \log_a g(x)$.

14.2. Показательно-степенные неравенства

Приведем алгоритм решения показательно-степенного неравенства вида $(f(x))^{g(x)} < (f(x))^{\varphi(x)}$ $(>;\ \leq;\ \geq)$:

1. Запишем неравенство в виде $(f(x))^{g(x)} - (f(x))^{\varphi(x)} < 0$ и рассмотрим функцию $F(x) = (f(x))^{g(x)} - (f(x))^{\varphi(x)}$.

2. Найдем область определения функции.

3. Найдем нули функции, решая уравнения:

1) $g(x) = \varphi(x)$, причем $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$;

2) $f(x) = 1$;

3) $f(x) = 0$.

4. Нанесем нули функции на ее область определения и применим метод интервалов.

14.3. Логарифмические неравенства

Методы решений логарифмических неравенств:

1. Если неравенство имеет вид $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$ $(<, >, \ge)$, то ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда:

а) при условии, что $a > 1$, получим $f(x) \le g(x)$;

б) при условии, что $0 < a < 1$, получим $f(x) \ge g(x)$.

2. Если неравенство имеет вид $\log_a f(x) < g(x)$, то ОДЗ: $f(x) > 0$. Тогда:

а) при условии, что $a > 1$, получим $f(x) < a^{g(x)}$;

б) при условии, что $0 < a < 1$, получим $f(x) > a^{g(x)}$.

3. Если неравенство имеет вид $\log_{q(x)} f(x) \le \log_{q(x)} g(x)$, то решать неравенство целесообразно методом интервалов (см. п. 7.1).

Заметим, что показательные и логарифмические неравенства всегда можно решить методом интервалов.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–5):

1. Неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) < g(x)$;	а) $0 < a < 1$;
2) $f(x) > g(x)$.	б) $a > 0,\ a \ne 1$;
	в) $a > 1$;
	г) $a > 0$.

2. Неравенство $a^{f(x)} < g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЕГО РЕШЕНИЕ)	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) < \log_a g(x)$;	а) $a > 1,\ g(x) > 0$;
2) $f(x) > \log_a g(x)$;	б) $a > 0,\ a \ne 1,\ g(x) < 0$;
3) $x \in \varnothing$.	в) $a < 1,\ g(x) < 0$;
	г) $a > 0,\ g(x) > 0$;
	д) $0 < a < 1,\ g(x) > 0$.

3. Неравенство $a^{f(x)} > g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЕГО РЕШЕНИЕ)	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) > \log_a g(x)$;	а) $a > 1$, $g(x) > 0$;
2) $f(x) < \log_a g(x)$;	б) $a > 0$, $g(x) > 0$;
3) $x \in D(f)$.	в) $a > 0$, $g(x) < 0$;
	г) $0 < a < 1$, $g(x) > 0$;
	д) $0 < a < 1$, $g(x) < 0$.

4. Неравенство $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) \leq g(x)$;	а) $a > 1$, $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right.$
2) $f(x) \geq g(x)$.	б) $a > 1$, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
	в) $0 < a < 1$, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
	г) $0 < a < 1$, $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array}\right.$

5. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) < a^{g(x)}$;	а) $0 < a < 1$, $g(x) > 0$;
2) $f(x) > a^{g(x)}$.	б) $0 < a < 1$, $f(x) > 0$;
	в) $a > 1$, $g(x) > 0$;
	г) $a > 1$, $f(x) > 0$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5
Вариант правильного ответа	1 – в, 2 – а	1 – а, 2 – д, 3 – б	1 – а, 2 – г, 3 – в	1 – б, 2 – в	1 – г, 2 – б

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $2^{1-2^{x^{-1}}} < 0{,}125$.

Решение. Запишем неравенство в виде $2^{1-2^{\frac{1}{2}}} < 2^{-3}$. Поскольку $2 > 1$, то получим:

$$1-2^{\frac{1}{x}} < 3,\ 2^{\frac{1}{x}} > 4,\ 2^{\frac{1}{x}} > 2^2,\ \frac{1}{x} > 2,\ \frac{1-2x}{x} > 0.$$

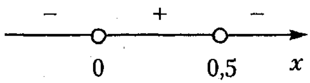

Рис. 14.1

Согласно рисунку 14.1 решением неравенства является промежуток $(0;\ 0{,}5)$.

Ответ: $(0;\ 0{,}5)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(0{,}(7)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geq 1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $0{,}(7)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 0{,}(7)^0$. Поскольку $0{,}(7) < 1$, то получим $\frac{x(x-2)}{x^2} \leq 0$.

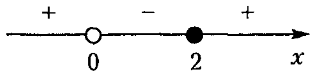

Рис. 14.2

Согласно рисунку 14.2 решением неравенства является промежуток $(0;\ 2]$.

Ответ: $(0;\ 2]$.

Пример 3. Определите число целых решений неравенства

$$(0{,}5)^{x^2-4x-5} \leq 3^{-x^2+4x+5}.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$.

Разделим обе его части на $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$ и получим $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq 1$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^0$. Так как основание степени $\frac{3}{2} > 1$, то показательное неравенство равносильно степенному неравенству $x^2-4x-5 \leq 0$.

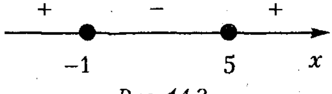

Рис. 14.3

Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 14.3) и получим $x \in [-1;\ 5]$.

Отрезку $[-1;\ 5]$ принадлежит 7 целых решений неравенства:

$-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5.$

Ответ: 7.

Пример 4. Решите неравенство $5^2\left(\sqrt{2}\right)^{2x}-10^x+5^x>25$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$25\cdot 2^x-2^x\cdot 5^x+5^x-25>0$$

и разложим его левую часть на множители.

Получим неравенство $2^x\left(25-5^x\right)-\left(25-5^x\right)>0$ или неравенство $\left(25-5^x\right)\cdot\left(2^x-1\right)>0$, которое решим методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(25-5^x\right)\cdot\left(2^x-1\right)$.
2. $D(f): x\in\mathbf{R}$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение $\left(25-5^x\right)\left(2^x-1\right)=0$, равносильное совокупности уравнений $5^x=25$, откуда $x=2$ и $2^x=1$, откуда $x=0$.
4. Нанесем числа 0 и 2 на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.4).

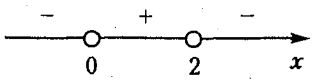

Рис. 14.4

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\left(25-5^x\right)\cdot\left(2^x-1\right)$ положительна, следовательно, $x\in(0;\ 2)$.

Ответ: $(0;\ 2)$.

Пример 5. Решите неравенство $0{,}5^{2\sqrt{x}+1}+1>1{,}5\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде $0{,}5^{2\sqrt{x}}+2-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}>0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=0{,}5^{2\sqrt{x}}+2-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.
2. $D(f): x\geq 0$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение

$$0{,}5^{2\sqrt{x}}-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}+2=0.$$

Получим: $0{,}5^{\sqrt{x}}=1$, откуда $x=0$ и $0{,}5^{\sqrt{x}}=2$, откуда $2^{-\sqrt{x}}=2$, $\sqrt{x}=-1$ и $x\in\varnothing$.

4. Нанесем число 0 на область определения функции и установим ее знак на полученном промежутке (рис. 14.5).

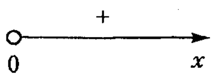

Рис. 14.5

5. Поскольку функция $f(x)=0{,}5^{2\sqrt{x}}+2-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$ положительна на промежутке $(0;\ +\infty)$, то решением неравенства является этот промежуток.

Ответ: $(0;\ +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>\ln e$.

Решение. Имеем показательно-степенное неравенство, которое запишем в виде $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}-1>0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}-1$.
2. $D(f): x\in \mathbf{R}$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение:

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}=\left(4x^2+2x+1\right)^{0}:$$

а) $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$, откуда $x_1=0,\ x_2=1$;

б) $4x^2+2x+1=1$, $x(2x+1)=0$, откуда $x_3=0,\ x_4=-0{,}5$;

в) $4x^2+2x+1=0$, откуда $x\in\varnothing$.

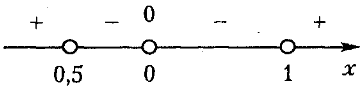

Рис. 14.6

4. Нанесем нули функции на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.6).

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x)=\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}-1$ положительна:

$$x\in(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1;\ +\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 7. Найдите решение неравенства

$$\log_{\lg 9}(8-x)>\log_{\lg 9}(x+4)(2x-3)^{-1}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}8-x>0,\\ \dfrac{x+4}{2x-3}>0\end{cases}$

Найдем ОДЗ неравенства. Поскольку решением первого неравенства является промежуток $(-\infty;\ 8)$, то второе неравенство системы решим на этом промежутке методом интервалов. Согласно рисунку 14.7 запишем: $x \in (-\infty;\ -4) \cup (1{,}5;\ 8)$.

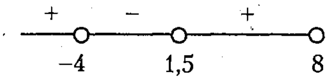

Рис. 14.7

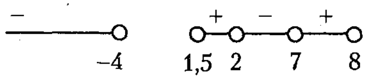

Рис. 14.8

Рассмотрим исходное неравенство. Так как основание логарифмов $\lg 9 < 1$, то найдем решение равносильного ему неравенства:

$$8 - x < \frac{x+4}{2x-3},\quad \frac{16x - 2x^2 - 24 + 3x - x - 4}{2x-3} < 0,\quad \frac{-2x^2 + 18x - 28}{2x-3} < 0,$$

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{2x-3} > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов на ОДЗ исходного неравенства (рис. 14.8) и получим: $x \in (1{,}5;\ 2) \cup (7;\ 8)$.

Ответ: $(1{,}5;\ 2) \cup (7;\ 8)$.

Пример 8. Найдите середину промежутка, на котором выполняется неравенство $\log_\pi(x+27) + \log_{\frac{1}{\pi}}(16-2x) < \log_\pi x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+27>0, \\ 16-2x>0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-27, \\ x<8, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 8)$.

Применяя формулу 12.5, получим $\log_\pi \dfrac{x+27}{16-2x} < \log_\pi x$. Поскольку основание логарифма $\pi > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x+27}{16-2x} < x$, $\dfrac{x+27-16x+2x^2}{16-2x} < 0$, $\dfrac{2x^2-15x+27}{16-2x} < 0$.

Решение этого неравенства показано на рисунке 14.9: $x \in (3;\ 4{,}5)$.

Найдем середину интервала $(3;\ 4{,}5)$: $\dfrac{3+4{,}5}{2} = 3{,}75$.

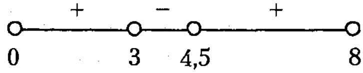

Рис. 14.9

Ответ: 3,75.

Пример 9. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$2^{-1}+\log_9 x-\log_3(5x)>\log_{\frac{1}{3}}(x+3).$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>-3; \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Применяя свойства логарифмов, запишем неравенство в виде

$$\log_{3^2} x-\log_3(5x)-\log_{3^{-1}}(x+3)>-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\log_3 x-\log_3(5x)+$$

$$+\log_3(x+3)>-\frac{1}{2},\ \log_3 x-\log_3(5x)^2+\log_3(x+3)^2>-1,$$

$$\log_3\frac{x(x+3)^2}{25x^2}>-1.$$

Поскольку основание логарифма $3>1$, то по определению логарифма получим $\frac{(x+3)^2}{25x}>3^{-1}$, а так как $x>0$, то запишем $x^2+6x+9>\frac{25x}{3}$ и $3x^2-7x+27>0$. Заметим, что это неравенство выполняется для всех действительных значений x, а значит выполняется и на ОДЗ исходного неравенства, следовательно, $x\in(0;\ +\infty)$. Число 1 – наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: 1.

Пример 10. Решите неравенство

$$\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<\log_4 4.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 2-\log_4 x>0, \\ \log_2(2-\log_4 x)>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \log_4 x<2, \\ 2-\log_2 x>2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;\ 1).$

Найдем решение неравенства. Применяя определение логарифма, получим: $\log_2(2-\log_4 x)-1<3$, $\log_2(2-\log_4 x)<4$, $2-\log_4 x<16$, $\log_4 x>-14$, $x>4^{-14}$, $x>2^{-28}$. Учитывая ОДЗ неравенства, запишем его решение: $x\in\left(2^{-28};\ 1\right)$.

Ответ: $\left(2^{-28};\ 1\right)$.

Пример 11. Найдите наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x-1|} 0{,}5 - 0{,}5 > 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \log_{|x-1|} 0{,}5 - 0{,}5$.

2. $D(f): \begin{cases} |x-1| > 0, \\ |x-1| \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} \neq 1, \\ x_3 \neq 0, x_4 \neq 2. \end{cases}$

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{|x-1|} 0{,}5 = 0{,}5$, откуда $0{,}5 = |x-1|^{\frac{1}{2}}$, $|x-1| = 0{,}25$. Тогда $x - 1 = 0{,}25$ или $x - 1 = -0{,}25$, а $x = 1{,}25$ или $x = 0{,}75$.

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.10).

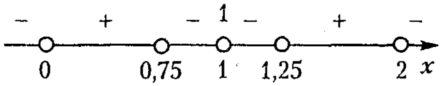

Рис. 14.10

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x) = \log_{|x-1|} 0{,}5 - 0{,}5$ положительна: $x \in (0;\ 0{,}75) \cup$ $\cup (1{,}25;\ 2)$. Число 1 – наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$.

Ответ: 1.

Пример 12. Найдите среднее арифметическое всех целых решений неравенства $2^{-1} \lg^2(x+6) \geq 2^{-1} \lg(x+6) \lg x + \lg^2 x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x + 6 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Запишем неравенство в виде $\lg^2(x+6) - \lg(x+6)\lg x - 2\lg^2 x \geq 0$ и решим его методом интервалов. По теореме Виета найдем нули функции:

$$f(\lg(x+6)) = \lg^2(x+6) - \lg(x+6)\lg x - 2\lg^2 x.$$

Запишем $\left[\begin{array}{l} \lg(x+6) = 2\lg x; \\ \lg(x+6) = -\lg x; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 6 = x^2, \\ x + 6 = \dfrac{1}{x}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0, \\ x^2 + 6 - 1 = 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2,\ x = 3, \\ x = -3 \pm \sqrt{10}. \end{array} \right.$

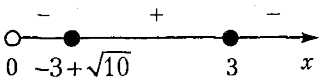

Рис. 14.11

Нанесем полученные числа на ОДЗ неравенства (рис. 14.11) и запишем его решение: $\left[-3+\sqrt{10};\ 3\right]$.

Запишем целые решения неравенства: 1; 2; 3. Найдем среднее арифметическое этих решений: $(1+2+3):3=2$.

Ответ: 2.

Пример 13. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>\log_{\sqrt{2}}2$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}-2>0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}-2$.

2. $D(f):x>0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}=2$. Возводя обе части уравнения дважды в квадрат, получим $x^{\log_2 x^{\frac{1}{2}}}=2^2$, $x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^2$, $x^{\log_2 x}=2^4$. Полагая $\log_2 x=a$, а $x=2^a$, запишем $\left(2^a\right)^a=2^4$, $2^{a^2}=2^4$. Тогда $a^2=4$ и $a=\pm2$. В таком случае $x_1=2^2=4$ и $x_2=2^{-2}=0{,}25$.

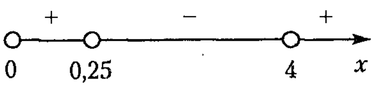

Рис. 14.12

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.12).

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x)=\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}-2$ положительна: $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ +\infty)$.

Ответ: $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ +\infty)$.

Пример 14. Найдите область определения функции

$$y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0{,}5}-\log_3 3\right)+\frac{\log_3 3}{\log_3(2x-6)}.$$

Решение. Найдем область определения функции, решая систему ограничений $\begin{cases} x-3>0,\ x-3\neq 1, \\ 2^{\log_{x-3}0{,}5}-1>0, \\ 2x-6>0, \\ \log_3(2x-6)\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\neq 4, \\ x\neq 3{,}5, \\ \log_{x-3}0{,}5>0. \end{cases}$

Рассмотрим решение неравенства $\log_{x-3}0{,}5>0$ на промежутках $(3;\ 3{,}5)$, $(3{,}5;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$.

Поскольку функция $f(x)=\log_{x-3}0{,}5$ нулей не имеет, то установим ее знаки на указанных промежутках (рис. 14.13).

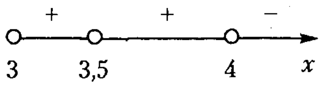

Рис. 14.13

Согласно рисунку 14.13 решением системы неравенств являются промежутки, на которых функция $f(x)=\log_{x-3}0{,}5$ положительна: $x\in(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$.

Ответ: $(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$.

Пример 15. Найдите решение неравенства

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}\geq\log_{x-3}1.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}-\log_{x-3}1\geq 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}-\log_{x-3}1.$$

2. $D(f):\begin{cases} 2x-7>0, \\ x-3>0, \\ x-3\neq 1, \\ 9-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3{,}5, \\ x>3, \\ x\neq 4, \\ x<9; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3{,}5;\ 4)\cup(4;\ 9).$

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{3^{-1}}(2x-7)+$ $+\log_3(x-3)=0$, $\log_3(x-3)=\log_3(2x-7)$, $x-3=2x-7$, $x=4$.

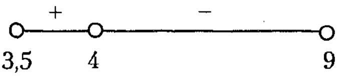

Рис. 14.14

4. Поскольку значение $x=4$ не принадлежит области определения функции, то установим знаки функции на ее области определения (рис. 14.14).

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}-\log_{x-3}1$ не отрицательна: $x\in(3{,}5;\,4)$.

Ответ: $(3{,}5;\,4)$.

Пример 16. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x+2|^{\log_{\sqrt{2}}(3+x)}\geq(-x-2)^8.$$

Решение. Поскольку $(-x-2)^8=|x+2|^8$, то запишем неравенство в виде $|x+2|^{2\log_2(3+x)}-|x+2|^8\leq 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=|x+2|^{2\log_2(3+x)}-|x+2|^8$.

2. $D(f): x>-3$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $|x+2|^{2\log_2(3+x)}=$ $=|x+2|^8$:

1) $\log_2(3+x)=4$, откуда $3+x=2^4$ и $x=13$;

2) $|x+2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=1, \\ x+2=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-3; \end{array}\right.$

3) $x+2=0$, откуда $x=-2$. Проверка: подставляя значение $x=-2$ в уравнение $|x+2|^{2\log_2(3+x)}=|x+2|^8$, получим $0^0=0^8$. Поскольку получили неопределенность вида 0^0, то $x\neq-2$.

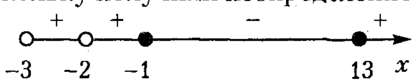

Рис. 14.15

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.15).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x)=|x+2|^{2\log_2(3+x)}-|x+2|^8$ не отрицатель-

на: $(-3;\ -2)\cup(-2;\ -1]\cup[13;\ +\infty)$. Число -1 – наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: -1.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–37):

1. $49^{0,5x^2-2x-1}-7^{-2}>0$. **2.** $\left(\sqrt{0,5}\right)^{\left(x^2+x-2\right)(6-2x)}>\left(\sqrt{0,25}\right)^0$.

3. $0,09^{x^2-1,5x+3}<243\cdot10^{-5}$. **4.** $-0,64<-\sqrt{10^{-4}\cdot2^{3x(x-3)}}<-0,64^0\cdot10^{-2}$.

5. $1^{\left|x^2-x\right|}<3^{\left|x-x^2\right|}<9$. **6.** $2^{2x}-2^{2(x-1)}+\sqrt[3]{8}^{2(x-2)}>52$.

7. $5^{x+1}+2^{x+3}+2^{x+4}<5^{x+2}+2^{x+2}$.

8. $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}-3^{\sqrt{4}}<2$. **9.** $25^{x+0.5}-\sqrt{5}^{2x}>4$.

10. $25^x-6\cdot5^x+5<0$. **11.** $8\cdot3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+3^{2\sqrt[4]{x}+2}-3^{2\sqrt{x}}\geq0$.

12. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{8+3x}>\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-7}$. **13.** $|x-3|^{2x^2-7x}>1^{x+3}$.

14. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3x+15}{x+2}}-\left(x^2+x+1\right)^9\geq0$.

15. $\log_{2^{-1}}2(3+x)-\log_{\frac{1}{2}}(x+8)>0$.

16. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<-2\log_{\frac{5}{6}}\sqrt{5}$.

17. $\lg6x^{-1}>\lg(x+5)$. **18.** $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<\log_5 1$.

19. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<\ln e$. **20.** $6\log_8(x-2)+3\log_{\frac{1}{8}}(x-3)-2>0$.

21. $2\log_9 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x-6<0$.

22. $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x<0$. **23.** $\log_{2x}(x-2)(x-3)-1<0$.

24. $\log_{2^{-1}}\log_2 2\log_{x-1}3>0$. **25.** $\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{\log_{1,7}\left(2^{-1}\cdot(1-\log_7 3)\right)}\geq0$.

26. $\dfrac{2\log_{25}\left(x^2+3\right)}{x^2-4}<0$. **27.** $(0,4)^{\log_{0,25}\left(x^2-5x+8\right)}\leq5\cdot2^{-1}$.

28. $4^{0,5\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}(2,5x)}>x^0$. **29.** $0,09^{2^{-1}\cdot\log_{\frac{1}{3}}3\log_2\frac{x+2}{x^2+2}}>1$.

30. $\lg x-0,5(\lg x)^2<0$. **31.** $\dfrac{1+\log_{0,25}x}{1-\log_{0,5}x}\leq0,5$.

32. $x^{\frac{1}{\log_{0,3}2}}+0{,}3^{\log_{0,2}x}-2\cdot(0{,}3)^2\le 0$. **33.** $\log_2\log_{\frac{1}{3}}x>\log_6 6$.

34. $\dfrac{x^2}{\log_{0,3}2}-\dfrac{2}{\log_{0,09}2}>0$. **35.** $x^{0,5\log_{0,5}x-3}\ge 2^{2,5\log_{0,5}x-3}$.

36. $\left(\sqrt{x}\right)^{2\log_2 x}+16x^{\log_{0,5}x}-17<0$. **37.** $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}-5^2<0$.

Найдите область определения функций (38–43):

38. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}+2$. **39.** $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}+4x-x^2$.

40. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\log_3|x-3|}+\log_3(x-3)^2$.

41. $y=\sqrt{\log_{0,5}^2(x-3)-1}+\sqrt{x-3}$.

42. $y=\sqrt[4]{2-\lg|2-x|}+\sqrt[4]{(x-2)^4}$.

43. $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-4)}-1}+\log_8^{-1}(x-4)$.

Решите системы неравенств (44–46):

44. $\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}\ge 1,\\ 2\cdot 4^{2x}\ge 32^x.\end{cases}$ **45.** $\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{16x-x^2-64}<0,\\ \lg\sqrt{x+7}+\lg 4>\lg(x-5).\end{cases}$

46. $\begin{cases}(1{,}5)^{-x}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{54}{128},\\ 2^{x^2-6x-6,5}-\sqrt{2}<0.\end{cases}$

47. Найдите сумму длин промежутков, которые образуют решения системы неравенств $1<2^{x(x+2)}<8$.

48. Найдите сумму квадратов целых решений системы неравенств $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-13x^2}\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-12x^2}$.

49. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,3}(3x-8)>-\log_{\frac{10}{3}}\left(4+x^2\right).$$

50. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\log_{\frac{1}{3}}x\right)>-1$.

51. Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений неравенства $\dfrac{\log_3(x+1)}{2\log_3 10+\log_{\frac{1}{3}} 9}<1$.

52. Найдите количество целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}^4 x-\log_{2^{-1}}^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+9\log_2\frac{32}{x^2}<4\log_{0,5}^2 x.$$

Ответы: **1.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **2.** $(-2;1)\cup(3;+\infty)$. **3.** $(-\infty;0,5)\cup\cup(1;+\infty)$. **4.** $(-1;0)\cup(3;4)$. **5.** $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$. **6.** $(3;+\infty)$. **7.** $(0;+\infty)$. **8.** $[0;4)$. **9.** $(0;+\infty)$. **10.** $(0;1)$. **11.** $[0;16]$. **12.** $(0;1)$. **13.** $(-\infty;0)\cup(2;3)\cup(3;3,5)\cup(4;+\infty)$. **14.** $(-2;-1]\cup\cup[-0,5;0)$. **15.** $(-3;2)$. **16.** $(2;3)$. **17.** $(0;1)$. **18.** $(4;6)$. **19.** $(2;+\infty)$. **20.** $(3;4)\cup(4;+\infty)$. **21.** $(0;27)$. **22.** $\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$. **23.** $(0;0,5)\cup(1;2)\cup(3;6)$. **24.** $(4;10)$. **25.** $(-\infty;-0,5]\cup[0,5;+\infty)$. **26.** $(0;4)$. **27.** $[1;4]$. **28.** $(0;0,4)\cup(1;+\infty)$. **29.** $(-0,5;2)$. **30.** $(0;1)\cup(100;+\infty)$. **31.** $(0;0,5)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **32.** $(0;0,04]$. **33.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **34.** $(-2;2)$. **35.** $[0,125;4]$. **36.** $(0,25;1)\cup(1;4)$. **37.** $(0,2;5)$. **38.** $[5,5;+\infty)$. **39.** $[0;3)\cup(3;4)$. **40.** $[0;2)\cup(4;6]$. **41.** $(3;3,5]\cup[5;+\infty)$. **42.** $[-98;2)\cup(2;102]$. **43.** $(4;5)\cup(5;+\infty)$. **44.** 1. **45.** $(5;8)\cup(8;29)$. **46.** $(-1;3)$. **47.** 2. **48.** 26. **49.** 3. **50.** 1,5. **51.** 10. **52.** 3.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Наименьшее неотрицательное решение неравенства $2^x+2^{\lvert x\rvert}-2^{\frac{3}{2}}\geq 0$ равно	1) 0; 2) 0,2; 3) 0,5; 4) 1; 5) 3.
2	Середина промежутка, который образуют решения неравенства $5^2\cdot 2^x-10^x+\left(\sqrt{5}\right)^{2x}-5^2>0$, равна	1) 2; 2) 1,5; 3) 0,5; 4) 5; 5) 1.

№	Задания	Варианты ответов
3	Наименьшее целое решение неравенства $(x-2)^{x^2-6x+8}-1>0$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) 4; 5) –4.
4	Сумма длин промежутков, которые образуют решения неравенства $3^{2\sqrt{x^2-3}+1}+9<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}$, равна	1) $2\sqrt{7}+2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 3) 1; 4) $2\sqrt{3}-2\sqrt{7}$; 5) $2\sqrt{7}-2\sqrt{3}$.
5	Сумма целых решений неравенства $\|3-x\|^{x^2+7x+12}\le 1$ равна	1) 5; 2) 2; 3) 6,6; 4) 10; 5) 15.
6	Длина промежутка, который образуют решения неравенства $\left(5+\sqrt{24}\right)^x+\left(5-\sqrt{24}\right)^x\le 10$, равна	1) 1; 2) 3,5; 3) 6; 4) 2; 5) 3.
7	Сумма целых решение неравенства $\log_2\left(0{,}5\log_{\sqrt{2}}2-\log_9 x+\log_{\frac{1}{9}} x\right)<1$ равна	1) 3; 2) 5; 3) –5; 4) 4; 5) 7.
8	Множество решений неравенства $\log_{0,5}\left(\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x\right)<0$ имеет вид	1) $(1;2)$; 2) $\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$; 3) $\left(0;\sqrt[3]{15}\right)$; 4) $(-5;1)$; 5) $(1;+\infty)$.
9	Если x_0 – наименьшее целое решение неравенства $\log_{x-3}(x-4)<\log_{\sqrt{x-3}}(x-3)$, то значение $\log_{x_0-3}x_0$ равно	1) $\dfrac{\lg 5}{1+\lg 2}$; 2) $\ln 5+1$; 3) $\dfrac{\lg 15}{\lg 5}$; 4) 5; 5) $\dfrac{\lg 5}{1-\lg 5}$.

№	Задания	Варианты ответов
10	Найдите середину интервала, который образуют решения неравенства $\log_{4x}\left(x^2-x-2\right)>\log_{4x}\left(3+2x-x^2\right)$	1) 2,5; 2) 4; 3) 2,75; 4) 1; 5) 3.
11	Среднее арифметическое целых решение неравенства $\dfrac{\lg^2(3-x)+\sqrt{x-1}}{\lg^2 x-\lg 10}<0$ равно	1) 1,5; 2) 3; 3) 1; 4) 2; 5) 6.
12	Число целых решений неравенства $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 100}$ равно	1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
13	Сумма целых решений неравенства $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{\lvert 2-x\rvert}\ge\log_{x^2}x$ равна	1) 8; 2) 11; 3) 12; 4) 14; 5) 24.
14	Неравенство $a^{-1}\cdot 2^{2x}-2^x-1\le -3a^{-1}$ имеет хотя бы одно решение при условии, что	1) $a\ge 2$; 2) $a>1$; 3) $a\in\mathbf{R}$; 4) $1<a<7$; 5) $3\le a\le 4$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	3	5	3	5	2	4	1
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	2	5	3	1	2	3	1