

9 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

9.1. Методы решения неравенств

Иррациональными называют неравенства, содержащие переменную под знаком радикала.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить:

а) если обе части неравенства на ОДЗ принимают только неотрицательные значения, то, возводя обе его части в квадрат, (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному неравенству (на ОДЗ);

б) возводя обе части неравенства в одну и ту же нечетную степень, всегда получим неравенство, равносильное данному неравенству.

1. Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$.

Так как выражение, стоящее под знаком радикала и правая часть неравенства не могут быть отрицательными, то, возводя обе части неравенства в квадрат, получим $f(x) \leq g^2(x)$. Учитывая систему ограничений $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ найдем решение неравенства.

2. Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$. Так как $g(x)$ может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения, то возможны два случая:

1) если правая часть неравенства не отрицательна, то есть $g(x) \geq 0$, то решаем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \end{cases}$

2) если правая часть неравенства отрицательна, то есть $g(x) < 0$, то решаем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в каждом случае.

Заметим, что неравенства $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ можно решить методом интервалов (см. п. 7.1).

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–3):

1. Неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \leq g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \leq g^2(x)$, при условии, что $f(x) \geq 0$;

3) неравенству $f(x) \leq g^2(x)$ при условии, что $g(x) \geq 0$

и $f(x) \geq 0$;

4) неравенству $f(x) \leq g^2(x)$ при условии, что $g(x) \geq 0$;

5) неравенству $f(x) \leq g^2(x)$ при условии, что $g(x) < 0$,

и $f(x) \geq 0$.

2. Если $g(x) \geq 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \geq g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \geq g^2(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$;

3) неравенству $f(x) \geq g(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$;

4) неравенству $|f(x)| \geq g^2(x)$;

5) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

3. Если $g(x) < 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \geq g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \geq g^2(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$;

3) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$

4) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \end{cases}$

5) совокупности неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Укажите все необходимые действия:

4. Чтобы решить неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ методом интервалов, необходимо:

- 1) записать неравенство в виде $\sqrt{f(x)} - g(x) \geq 0$;
- 2) найти нули функций $f(x)$ и $g(x)$;
- 3) найти нули функции $F(x) = \sqrt{f(x)} - g(x)$;
- 4) найти область определения функций $f(x)$ и $g(x)$;
- 5) найти область определения функции $F(x) = \sqrt{f(x)} - g(x)$;
- 6) нанести нули функции на ее область определения;
- 7) установить знаки функции на полученных промежутках;
- 8) записать все промежутки, на которых рассматриваемая функция положительна;
- 9) записать все промежутки, на которых рассматриваемая функция не отрицательна.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	3	2	3	1, 3, 5, 6, 7, 9

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{2x - 15 + x^2} > -1$.

Решение. Так как выражение, стоящее под знаком радикала не может быть отрицательным, то запишем ОДЗ неравенства:

$$x^2 + 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty) \text{ (рис. 9.1).}$$



Рис. 9.1

Поскольку левая часть неравенства неотрицательна, а правая – всегда отрицательна на ОДЗ, то решением неравенства является любое число из промежутков $(-\infty; -5]$ и $[3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Пример 2. Найдите целые решения неравенства

$$5 > \sqrt{x+1} + x.$$

Решение. Способ 1. Запишем неравенство в виде

$$\sqrt{f(x)} < g(x): \sqrt{x+1} < 5 - x.$$

Так как выражение, стоящее под знаком радикала и правая часть неравенства не могут быть отрицательными, то запишем систему ограничений:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 5-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 5].$$

Возводя обе части неравенства $\sqrt{x+1} < 5-x$ в квадрат, получим: $(\sqrt{x+1})^2 < (5-x)^2$, $x+1 < 25-10x+x^2$, $x^2-11x+24 > 0$.

Решим это неравенство методом интервалов (рис. 9.2). Очевидно, что решением неравенства является промежуток $[-1; 3)$.

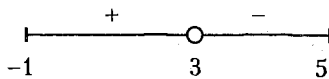


Рис. 9.2

Запишем целые решения неравенства: $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Способ 2. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x+1} - 5 + x < 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+1} - 5 + x$.

2. $D(f): x \geq -1$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x+1} = 5-x$ при условии, что $x \leq 5$. Получим: $x+1 = 25-10x+x^2$, $x^2-11x+24 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, причем $x_2 = 8$ – посторонний корень уравнения, так как он не удовлетворяет условию $x \leq 5$.

4. Нанесем число 3 на область определения функции и установим ее знаки на полученных промежутках (рис. 9.3).

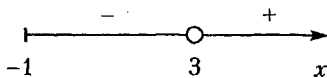


Рис. 9.3

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x) = \sqrt{x+1} - 5 + x$ отрицательна: $x \in [-1; 3)$.

Ответ: $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Пример 3. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{x^2-4x} > x-3$, удовлетворяющих условию $\sqrt[4]{(1-x)^4} \leq (-\sqrt{2})^4$.

Решение. Способ 1. Имеем неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Рассмотрим два случая.

1. Если правая часть неравенства неотрицательна, то запишем систему ограничений: $\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, \\ x - 3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; +\infty)$ (рис. 9.4).

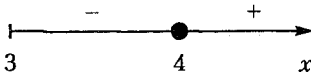


Рис. 9.4

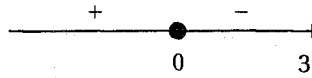


Рис. 9.5

Возведем обе части неравенства в квадрат и получим:

$$x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9, \quad 2x > 9, \quad x > 4,5.$$

Учитывая систему ограничений, запишем: $x \in (4,5; +\infty)$.

2. Если правая часть неравенства отрицательна, то решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, \\ x - 3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \geq 0, \\ x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \text{ (рис. 9.5).}$$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в первом и во втором случаях:

$$x \in (-\infty; 0] \cup (4,5; +\infty).$$

Рассмотрим дополнительное ограничение $\sqrt[4]{(1-x)^4} \leq (-\sqrt{2})^4$ и запишем его в виде $|x-1| \leq 4$. Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \leq 4, \\ x-1 \geq -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq -3; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 5].$$

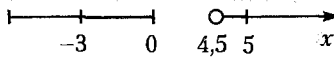


Рис. 9.6

Запишем решение задачи (рис. 9.6):
 $x \in [-3; 0] \cup (4,5; 5]$.

Найдем сумму целых решений задачи:
 $-3 - 2 - 1 + 0 + 5 = -1$.

Способ 2. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2 - 4x} - x + 3 > 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - x + 3$.

2. $D(f): x^2 - 4x \geq 0$. Поскольку решения неравенства должны удовлетворять условию $|x-1| \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-3; 5]$, то решим неравенство $x^2 - 4x \geq 0$ на отрезке $[-3; 5]$ и согласно рисунку 9.7 запишем: $x \in [-3; 0] \cup [4; 5]$.

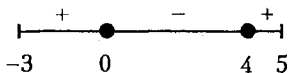


Рис. 9.7

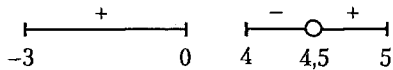


Рис. 9.8

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x^2-4x} = x-3$, при условии, что $x-3 \geq 0$. Получим: $x^2-4x = x^2-6x+9$, откуда $x = 4,5$.

4. Нанесем число 4,5 на область определения функции и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.8).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x) = \sqrt{x^2-4x} - x + 3$ положительна:

$$x \in [-3; 0] \cup (4,5; 5].$$

Этим промежуткам принадлежит 5 целых решений неравенства, сумма которых равна -1.

Ответ: -1.

Пример 4. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $\sqrt[11]{-x^2+5x+6} \cdot \sqrt[10]{4-x} > 0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[11]{-x^2+5x+6} \cdot \sqrt[10]{4-x}$.

2. $D(f)$: $4-x \geq 0$, $x \leq 4$.

3. Найдем нули функции, решая уравнения $-x^2+5x+6=0$ и $4-x=0$. Получим: $x_1=6$, $x_2=-1$, $x_3=4$.

4. Нанесем числа -1 и 4 на область определения функции и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.9).

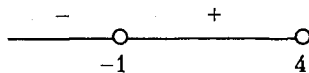


Рис. 9.9

5. Согласно рисунку 9.9 решением неравенства является интервал $(-1; 4)$, на котором функция $f(x) = \sqrt[11]{-x^2+5x+6} \cdot \sqrt[10]{4-x}$ положительна.

Найдем среднее арифметическое целых решений неравенства:

$$(0+1+2+3):4 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}-(x+3)}{x+3} > -1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} > -1, \quad \frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} - 1 > -1,$$

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}$.

2. Найдем область определения функции. Поскольку выражение, стоящее под знаком радикала не должно быть отрицательным, то $17-15x-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+15x-17 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-8,5; 1]$ (рис. 9.10). Исключив из отрезка $[-8,5; 1]$ точку -3 (точку разрыва функции), окончательно получим: $x \in [-8,5; -3) \cup (-3; 1]$.



Рис. 9.10

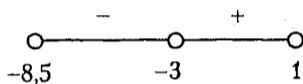


Рис. 9.11

3. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.11).

4. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x) = \frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}$ положительна: $x \in (-3; 1]$.

Ответ: $(-3; 1]$.

Пример 6. Решите неравенство $x-12 \leq \sqrt{x}$.

Решение. Запишем неравенство в виде $x - \sqrt{x} - 12 \leq 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \sqrt{x} - 12$.

2. $D(f): x \geq 0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.

По теореме Виета получим: $\sqrt{x} = 4$, откуда $x = 16$ и $\sqrt{x} = -3$, откуда $x \in \emptyset$.

4. Нанесем число 16 на область определения функции и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.12).

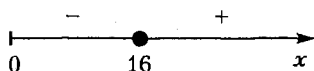


Рис. 9.12

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x) = x - \sqrt{x} - 12$ не положительна: $x \in [0; 16]$.

Ответ: $[0; 16]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–13):

1. $\sqrt[3]{3}\sqrt{x^3+3x+4} > -\sqrt[3]{9}$.

2. $\sqrt{x+5}-1 < -x$.

3. $\sqrt{3x-x^2}+x < 4$.

4. $-\sqrt{x^2-x-12} > -x$.

5. $\sqrt{9x-20}-x < 0$.

6. $\sqrt{x^2-4x+3} > x$.

7. $2^{-1}\sqrt{-x^2+6x-5}-2^2+2^0x > 0$.

8. $(1-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20} \leq 0$.

9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}+\sqrt{6-x} > \sqrt{x-1}$.

10. $\sqrt{3x^2+5x+8} \leq \sqrt{3x^2+5x+1}+1$.

11. $\frac{\sqrt{2-x}+4x}{x}-\frac{3}{x} \geq 2$.

12. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

13. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\frac{x-3}{\sqrt{x-3}} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

14. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt[4]{x^2-2x+1}\cdot\sqrt[3]{x+3} \leq 0.$$

15. Найдите количество целых решений неравенства

$$\sqrt[3]{x^2-4}\cdot\sqrt{x+8} < 0.$$

16. Найдите координату середины отрезка, на котором выполняется неравенство $1,5\sqrt[6]{x+1}-1 \geq -0,5\sqrt[3]{-x-1}$.

17. Найдите длину отрезка, на котором выполняется неравенство $-\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+6 \geq 0$.

18. Найдите наименьшее значение x , при котором справедливо неравенство $\frac{3-x}{2} \leq \frac{(\sqrt{x-5})^2}{6-x}$.

19. Найдите наибольшее значение x , при котором верно неравенство $1+x \leq 2,5\sqrt{x}$.

20. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \sqrt{(4-x^2)\sqrt{2x-8} + \sqrt{17}}$?

21. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\sqrt{x^2-9x+20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2-13}.$$

Ответы: 1. $[-1; +\infty)$. 2. $x \in [-5; -1)$. 3. $[0; 3]$. 4. $[4; +\infty)$.
 5. $\left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$. 6. $(-\infty; 0] \cup (4,5; +\infty)$. 7. $x \in (3; 4]$. 8. $\{-4\} \cup [5; +\infty)$. 9. $[2; 3]$. 10. $(-\infty; -\frac{8}{3}) \cup [1; +\infty)$. 11. $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$.
 12. $(-\infty; 0,75) \cup (4; 7)$. 13. $(5; +\infty)$. 14. 1. 15. 3. 16. 31,5. 17. 16.
 18. 5. 19. 4. 20. 1. 21. 22.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Количество целых решений неравенства $\sqrt{x+2} \cdot (3-x) > 0$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 5; 4) 7; 5) 11.
2	Число неотрицательных решений неравенства $\sqrt{3-x} \cdot (x+2) \leq 0$ равно	1) 3; 2) 9; 3) 1; 4) 2; 5) 12.
3	Наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2-3x+2+5} > 2x$ равно	1) 0; 2) -1; 3) 2; 4) 4; 5) 3.
4	Длина промежутка, который образуют все решения неравенства $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$, равна	1) 3; 2) 1,5; 3) 6; 4) 9; 5) 10,5.

№	Задания	Варианты ответов
5	Множество всех решений неравенства $\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$ имеет вид	1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-0,5; 0) \cup (0; 0,5)$; 3) $[-0,5; 0,5]$; 4) $(-0,5; 0,5)$; 5) $[-0,5; 0) \cup (0; 0,5]$.
6	Наименьшее целое решение неравенства $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} > 35-12x$ равно	1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) 2; 5) 4.
7	Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} < 0$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) -2; 5) 7.
8	Множество решений неравенства $\sqrt{5x-4} - 3 + \sqrt{3x+1} < 0$ имеет вид	1) $\left[\frac{2}{3}; 3\right]$; 2) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 3) $[0,8; 1]$; 4) $(0,8; 1)$; 5) $(0,8; 11)$.
9	Наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\sqrt{x^2+3x+2} < \sqrt{x^2-x+1} + 1$ равно.	1) -2; 2) -1; 3) -23; 4) -7; 5) -13.
10	Количество целых решений неравенства $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x+2} < 35$ равно	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 11; 5) 7.
11	Количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{1+2^{-1}\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \frac{x^2}{x^3}$, равно	1) 10; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) 12.

№	Задания	Варианты ответов
13	Неравенство $\sqrt{4-4x^3+x^6} + \sqrt[6]{4} > x$ не выполняется если	1) $x \in (-\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2})$; 2) $x \in (0; \sqrt[3]{2}]$; 3) $x = \sqrt[3]{2}$; 4) $x = \sqrt{2}$; 5) $x \in [\sqrt[3]{2}; \sqrt{2}]$.
13	Среднее арифметическое целых значений x , при которых не выполняется неравенство $-\sqrt{x^4-2x^2+1} < x-1$, равно	1) 1,25; 2) -0,5; 3) -2; 4) 5,4; 5) 1,24.
14	Количество целых решений системы неравенств $\begin{cases} -\sqrt{4x-7} > -x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} - 4 > 0 \end{cases}$ равно	1) 2; 2) 1; 3) 7; 4) 3; 5) 4.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	2	3	5	1	5	4	3
Номер задания	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	3	2	1	3	3	2	1