

4 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

4.1. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax = b$ называют *линейным*.

Исследование решения линейного уравнения:

- 1) если $a \neq 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то уравнение $ax = b$ имеет одно решение:
 $x = \frac{b}{a}$;
- 2) если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ примет вид $0 \cdot x = 0$. Поскольку получили верное числовое равенство $0 = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$;
- 3) если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ примет вид $0 \cdot x = b$. Поскольку равенство $0 = b$ не верно, то уравнение $ax = b$ корней не имеет: $x \in \emptyset$.

4.2. Исследование систем линейных уравнений

Рассмотрим прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ и составим систему линейных уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$

1. Система имеет **одно решение** (прямые пересекаются), если $k_1 \neq k_2$.

Угол между этими прямыми находят по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|.$$

Если выполняется условие $k_1 k_2 = -1$, то прямые перпендикулярны.

2. Система **не имеет решений** (прямые параллельны), если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.
3. Система имеет **бесконечное множество решений** (прямые совпадают), если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

4.3. Линейные неравенства

Неравенство вида $ax < b$ ($>$; \leq ; \geq) называют *линейным*.

Исследование решения линейного неравенства:

1) если $a > 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то $x < \frac{b}{a}$ – решение неравенства $ax < b$;

2) если $a < 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то $x > \frac{b}{a}$ – решение неравенства $ax < b$;

3) если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство $ax < b$ примет вид $0 < b$, что не верно. Следовательно, данное неравенство не имеет решений: $x \in \emptyset$;

4) если $a = 0$ и $b > 0$, то неравенство $ax < b$ примет вид $0 < b$, что верно. Следовательно, данное неравенство имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$.

Систему двух неравенств записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x). \end{cases}$$

Чтобы *решить систему неравенств*, необходимо найти множества решений каждого неравенства системы, тогда общая часть (пересечение) этих множеств и будет решением данной системы неравенств.

Совокупность двух неравенств записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x). \end{cases}$$

Чтобы *решить совокупность неравенств*, необходимо найти множества решений каждого неравенства совокупности, тогда объединение этих множеств и будет решением данной совокупности неравенств.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–4):

1. Уравнение вида $kx = b$ имеет:

РЕШЕНИЕ

1) одно решение;

2) более одного решения;

ПРИ УСЛОВИИ

а) $k = 0$;

б) $k \neq 0$;

РЕШЕНИЕ

3) не имеет решений.

ПРИ УСЛОВИИ

в) $k \neq 0$ и $b \in \mathbf{R}$;

г) $k=0$ и $b=0$;

д) $k=0$ и $b \neq 0$.

2. Неравенство вида $kx > b$ имеет:

РЕШЕНИЕ

1) $x > \frac{b}{k}$;

2) $x < \frac{b}{k}$;

3) $x \in \mathbf{R}$;

4) $x \in \emptyset$.

ПРИ УСЛОВИИ

а) $k > 0$ и $b \in \mathbf{R}$;

б) $k < 0$ и $b \in \mathbf{R}$;

в) $k=0$ и $b \neq 0$;

г) $k=0$ и $b \in \mathbf{R}$;

д) $k=0$ и $b > 0$;

е) $k=0$ и $b < 0$.

3. Система уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет:

РЕШЕНИЕ

1) одно решение;

2) более одного решения;

3) не имеет решений.

ПРИ УСЛОВИИ

а) $k_1 = k_2$;

б) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;

в) $k_1 \neq k_2$;

г) $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$;

д) $b_1 = b_2$.

4. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются:

ПОД УГЛОМ

1) 90° ;

2) 0° ;

3) $\arctg \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right|$.

ПРИ УСЛОВИИ

а) $k_1 \neq k_2$;

б) $b_1 \neq b_2$;

в) $k_1k_2 = 1$;

г) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;

д) $k_1k_2 = -1$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1 - в, 2 - г, 3 - д.	1 - а, 2 - б, 3 - е, 4 - д.	1 - в, 2 - г, 3 - б.	1 - д, 2 - г, 3 - а.

Примеры

Пример 1. Найдите все значения a и b , при которых уравнение $5ax - 2b = x$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Приведем уравнение к виду $kx = b$. Запишем:

$$5ax - x = 2b, \quad x(5a - 1) = 2b.$$

Уравнение имеет бесконечно много решений, если $5a - 1 = 0$ и $2b = 0$, то есть если $a = 0,2$ и $b = 0$.

Ответ: $a = 0,2$, $b = 0$.

Пример 2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$ и образующей с осью Ox угол 30° .

Решение. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$. Угловой коэффициент k прямой находят по формуле $k = \operatorname{tg} \alpha$ (см. п. 3.2).

Зная, что $\alpha = 30^\circ$, получим $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку искомая прямая проходит через точку $M(2; 1)$, то, подставляя в уравнение прямой координаты точки M $x = 2$, $y = 1$ и значение $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, найдем значение b :

$$1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + b, \text{ откуда } b = -\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Зная значения k и b , запишем уравнение искомой прямой:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Найдите угол между прямыми

$$y = \frac{7}{2}x + 1 \text{ и } y = -\frac{4}{3}x + 2.$$

Решение. Угол между прямыми найдем по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|.$$

Зная, что $k_1 = \frac{7}{2}$, а $k_2 = -\frac{4}{3}$, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-\frac{4}{3} - \frac{7}{2}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2}} \right| = \left| \frac{-\frac{29}{6}}{-\frac{22}{6}} \right| = \frac{29}{22}, \text{ откуда } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{29}{22}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{29}{22}$.

Пример 4. Найдите сумму координат точки пересечения прямых $3x - 5y = 27$ и $2x + 3y = 18$.

Решение. Координаты точки пересечения заданных прямых найдем, решая систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 27, \\ 2x + 3y = 18. \end{cases}$

Выполним ряд преобразований.

1. Умножим первое уравнение системы на 3, а второе на 5. Получим: $\begin{cases} 9x - 15y = 81, \\ 10x + 15y = 90. \end{cases}$

2. Сложим уравнения системы: $19x = 171$, откуда $x = 9$.

3. Подставим значение $x = 9$ в любое уравнение системы, например в уравнение $3x - 5y = 27$, и найдем значение y : $27 - 5y = 27$, откуда $y = 0$.

4. Найдем сумму координат точки пересечения заданных прямых: $9 + 0 = 9$.

Ответ: 9.

Пример 5. Найдите все значения a , при которых система уравнений $\begin{cases} -1,4x + 0,4ay + 1 = 0, \\ (1 - 0,75a)x + ay - 1,75 = 0 \end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Запишем каждое уравнение системы в виде:

$$y = kx + b.$$

Преобразуем первое уравнение системы, предварительно умножив его на 5:

$$-7x + 2ay + 5 = 0, \quad 2ay = 7x - 5, \quad y = \frac{7}{2a}x - \frac{5}{2a}.$$

Получим $k_1 = \frac{7}{2a}$, $b_1 = -\frac{5}{2a}$.

Преобразуем второе уравнение системы, предварительно умножив его на 4:

$$(4-3a)x+4ay=7, 4ay=(3a-4)x+7, y=\frac{3a-4}{4a}x+\frac{7}{4a}.$$

Получим $k_2=\frac{3a-4}{4a}, b_2=\frac{7}{4a}$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $a \neq 0$, то исходная система не имеет решений при усло-

вии, что $\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{7}{2a} = \frac{3a-4}{4a}, \\ -\frac{5}{2a} \neq \frac{7}{4a} \end{cases}; \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = \frac{3a-4}{2}, \\ -5 \neq \frac{7}{2} \end{cases}$.

Найдем значение a из первого уравнения системы:

$$3a-4=14, 3a=18, a=6.$$

2. Рассмотрим исходную систему при условии, что $a=0$. Подставляя значение $a=0$ в каждое уравнение этой системы, полу-

чим: $\begin{cases} 7x=5, \\ 4x=7; \end{cases} \begin{cases} x=\frac{5}{7}, \\ x=\frac{7}{4}. \end{cases}$ Так как $\frac{5}{7} \neq \frac{7}{4}$, то при $a=0$ система не имеет

решения.

Ответ: $\{0; 6\}$.

Пример 6. Найдите середину интервала, являющегося решением системы неравенств $\begin{cases} -2 < 2x-1 < 1, \\ (2\sqrt{5}-5)(3-5x) < 0. \end{cases}$

Решение. Решим каждое неравенство системы:

1) $-2 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1;$

2) $(2\sqrt{5}-5)(3-5x) < 0 \Leftrightarrow 3-5x > 0 \Leftrightarrow 5x-3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{5},$

поскольку $2\sqrt{5}-5 = \sqrt{20}-\sqrt{25} < 0$.

Найдем решение данной системы неравенств. Согласно рисунку 4.1 запишем $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$.

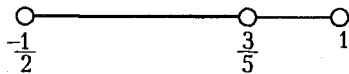


Рис. 4.1

Найдем середину интервала $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. Получим:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) : 2 = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Ответ: 0,05.

Пример 7. Найдите наибольшее целое решение совокупности

неравенств
$$\begin{cases} 2 - \frac{5-x}{3} \geq x+1, \\ 3 + \frac{x-1}{4} < 2-x. \end{cases}$$

Решение. Найдем решение каждого неравенства совокупности, выполнив равносильные преобразования неравенств:

1) $2 - \frac{5-x}{3} \geq x+1 \Leftrightarrow 6-5+x \geq 3x+3 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1;$

2) $3 + \frac{x-1}{4} < 2-x \Leftrightarrow 12+x-1 < 8-4x \Leftrightarrow 5x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{5}.$

Поскольку решение второго неравенства совокупности содержит решение первого неравенства, то решением данной совокупности неравенств является промежуток $(-\infty; -\frac{3}{5})$, а число -1 является наибольшим целым решением этой совокупности неравенств.

Ответ: -1 .

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите все значения a и b , при которых уравнение $2bx - a = 3x$ имеет бесконечно много решений.

2. Найдите все значения a и b , при которых неравенство $2bx - a \geq 3x$ не имеет решений.

3. Найдите такие значения a , при которых уравнение $(a^2 - 1)x + 3 - a = (-\sqrt{2}a)^2$:

- а) имеет один корень;
- б) имеет более одного корня;
- в) не имеет корней.

4. Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 3 - 7x$ и проходит через точку с координатами $(3; -7)$.

5. Запишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = 5x$ и проходит через точку с координатами $(0; -5)$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 675,1x + 324,9y = 2675,1, \\ 32,49x + 67,51y = 232,49. \end{cases}$$

7. Найдите все значения m , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (m-1)y = 3, \\ (m+1)x + 4y = -3 \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений; б) не имеет решений.

8. Найдите все значения a , при которых прямые

$$2x - (2 - (-3a)^2)y = 3a \text{ и } y = 1 - x:$$

а) параллельны; б) перпендикулярны.

9. Найдите угол между прямыми $2y = 5 - 3x$ и $x + y = 1$.

10. Найдите значение числа a , при котором система

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{3} + \frac{0,4x+1,2y}{2} = 2, \\ \frac{x+2y}{2} + \frac{5y-x}{3} = 3, \\ \frac{5x-y}{3} + \frac{10y-x}{2} = a \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

11. Найдите значение a , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x - (1 - 4,5a^2)y = 1,5a, \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ не имеет решений.}$$

12. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{3x-3}{2} - 2x + \frac{3x}{2} > 3 - \frac{3x+15}{2}, \\ \frac{x+5}{4} - 6 + 7x < \frac{x+1}{2}. \end{cases}$$

13. Найдите среднее арифметическое целых решений системы неравенств $\begin{cases} -1 \leq 2x - 3 \leq 1, \\ 5 - 0,4x > 0. \end{cases}$

14. Решите неравенство $a(2x - 6) + 6x + 20 \leq 0$.

15. При каких значениях b наибольшее целое число, являющееся решением совокупности неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \leq b \end{cases}$ равно 13?

16. Решите совокупность неравенств $\begin{cases} 5 - \frac{3-x}{4} < 2x + 3, \\ 4 + \frac{2x-1}{3} \geq 5 - x. \end{cases}$

17. Решите совокупность неравенств $\begin{cases} -1 < 3 - 2x < 1, \\ 5x - 3 \geq 7 - 2x. \end{cases}$

Ответы: 1. $a=0$, $b=1,5$. 2. $a > 0$, $b=1,5$. 3. а) $a \neq \pm 1$; б) 1; в) -1 . 4. $y = -7x + 14$. 5. $y = -\frac{1}{5}x - 5$. 6. (3; 2). 7. а) -3 ; б) 3. 8. а) $-\frac{2}{3}$; б) 0. 9. $\arctg \frac{1}{5}$. 10. 7. 11. $-\frac{2}{3}$. 12. -1 . 13. 1,5. 14. $x \geq \frac{2a}{a+3}$ при $a < -3$; $x \in \emptyset$ при $a = -3$; $x \leq \frac{2a}{a+3}$ при $a > -3$. 15. $13 \leq b < 14$. 16. $(\frac{5}{7}; +\infty)$. 17. $(1; +\infty)$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Сумма целых чисел, между которыми заключен корень уравнения $(5+4x^{-1})^{-1} = (-3)^{-2}$, равна	1) -1; 2) -2; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
2	Ближайшее к корню уравнения $(5+\sqrt{27}) \cdot x = -2$ целое число равно	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 2; 5) -2.
3	Уравнение $15x+3a=3+x$ имеет отрицательное решение при условии, что a	1) $a \in \mathbf{R}$; 2) $a=0$; 3) $a < 3$; 4) $a > 1$; 5) $a \geq 1$.
4	Уравнение $a(2x-a) = -6x-9$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x < -2$, при условии, что a	1) $a < -1$; 2) $a \neq -3$; 3) $a \leq -1$; 4) $a \in \mathbf{R}$; 5) $a < -1, a \neq -3$.
5	Тангенс угла между прямыми $x-y=2$ и $4x+2y=5$ равен	1) 5; 2) -3; 3) -5; 4) 3; 5) -1.
6	Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(3-\sqrt{10})x > 19-6\sqrt{10}$, равно	1) 31; 2) 7; 3) 2; 4) 0; 5) -1.
7	Область определения функции $y = \sqrt{-x+\sqrt{3-\sqrt{8}}}+2$ задает множество чисел вида	1) $x \in \mathbf{R}$; 2) $x \geq 1$; 3) $(-\infty; \sqrt{2}+1]$; 4) $(\sqrt{2}+1; +\infty)$; 5) $x > 3-2\sqrt{2}$.
8	Решением системы неравенств $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq c \end{cases}$ является промежуток $(2; +\infty)$ при следующих значениях c	1) 2; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(-\infty; 2]$; 4) $[0; 2]$; 5) $[2; +\infty)$.
9	Решение системы неравенств $\begin{cases} (1-\sqrt{3})x + \sqrt{12} \leq 4, \\ x\sqrt{243} \leq -27 \end{cases}$ имеет вид	1) \mathbf{R} ; 2) $(0; +\infty)$; 3) $[0; 2\sqrt{3}]$; 4) \emptyset ; 5) $(-\infty; -8\sqrt{3}]$.

№	Задания	Варианты ответов
10	Решением совокупности неравенств $\begin{cases} x < 1, \\ x > a \end{cases}$ является множество всех действительных чисел при следующих значениях a	1) $a \leq 1$; 2) $a < 1$; 3) $a = 1$; 4) $a > 1$; 5) $a \in \mathbf{R}$.
11	Если число -5 – наименьшее целое решение совокупности неравенств $\begin{cases} x \geq -2, \\ -x < -a, \end{cases}$ то целое значение a равно	1) -6 ; 2) -5 ; 3) 1 ; 4) 6 ; 5) 16 .
12	Количество целых отрицательных решений совокупности неравенств $\begin{cases} -3 < 1 - 2x \leq -1, \\ 3x + 1 < 4x + 5 \end{cases}$ равно	1) 3 ; 2) 4 ; 3) 1 ; 4) 2 ; 5) 8 .
13	Площадь фигуры, ограниченной линиями $3x - 4y + 12 \geq 0$, $x + y - 2 \leq 0$ и $y \geq 0$ равна	1) 7 ; 2) $\frac{15}{7}$; 3) $7\frac{5}{7}$; 4) 27 ; 5) 30 .
14	Прямые $3x + ay = 4$ и $3x + 2y = \frac{b}{2}$ перпендикулярны, если	1) $a = 4,5, b = 0$; 2) $a \neq 2, b \in \mathbf{R}$; 3) $a = -4,5, b \in \mathbf{R}$; 4) $a = 0, b \in \mathbf{R}$; 5) $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	5	1	4	5	4	5	3
Номер задания	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	3	4	2	1	1	3	3