Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

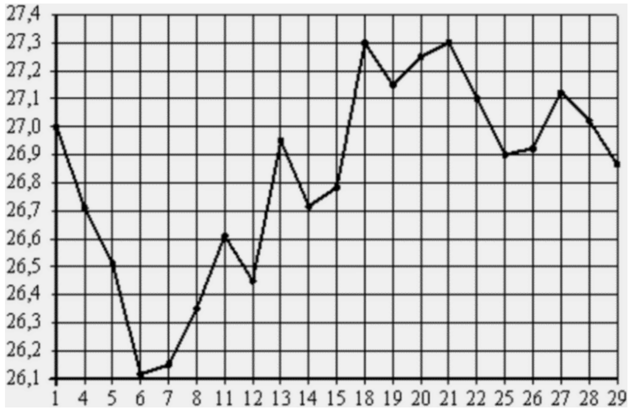
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В школе 400 учеников, из них 30% – ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 15% изучают французский язык. Сколько учеников в школе изучает французский язык, если в начальной школе французский язык не изучается?

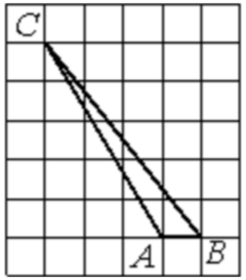
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 29 сентября 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс евро в период с 21 по 28 сентября. Ответ дайте в рублях.



Ответ: ____________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.



Ответ: ___________________________.

4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

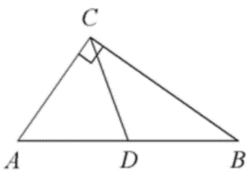
Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$\sqrt[3]{x+3} = 5.$

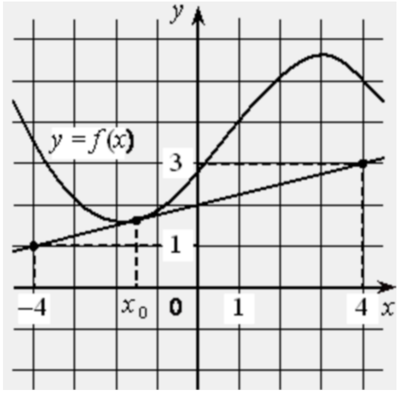
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике $ABCCD$ −медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



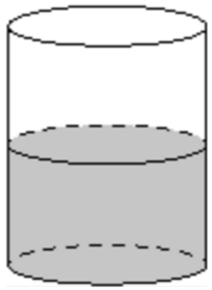
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите
$\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{19}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Ответ: ___________________________.

10 Груз массой 0,38 кг колеблется на пружине. Его скорость v(в м/с) меняется по закону $v = v_0\sin\frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний в секундах, $T = 8$ с – период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E(в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза (в кг), v – скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ___________________________.

11 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции
$y = 20\,\mathrm{tg}\,x - 20x + 5\pi - 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём
$AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

15 Решите неравенство
$\frac{9^x - 3^x + 2}{9^x - 3^x} + \frac{5\cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \le \frac{2\cdot 3^{x+1} - 2}{3^x}$.

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 –середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 120°$, $\angle BCA = 15°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 4\sqrt{3}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 190218

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

19 Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов.
Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, славших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест – 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	42
2	26,9
3	5
4	0,25
5	122
6	55
7	0,25
8	2275
9	0,9
10	0,38
11	8
12	14
13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n \in Z.$ б)$1{,}5\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$
14	$2{,}4\sqrt{5}$
15	$(-\infty;0)\cup[1;\log_3 4)$
16	2
17	9 млн
18	$\{0\}\cup[2;+\infty)$
19	а) да, б) да, в) 15

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

.

Решение:

а)

Синус двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$2\sin x\cdot\cos x = \sin x - 2\cos x + 1$
$2\sin x\cdot\cos x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$
$\sin x\cdot(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$
$(2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$ $2\cos x = 1$	$\sin x + 1 = 0$ $\sin x = -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$

б)

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = 1{,}5\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi = 3{,}5\pi \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Подберём корни для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Подберём корни для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $1{,}5\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев,	0

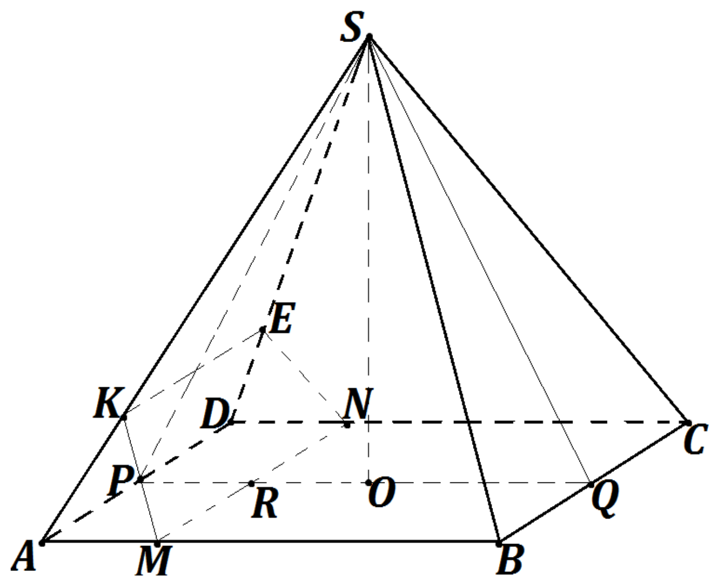
перечисленных выше	
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

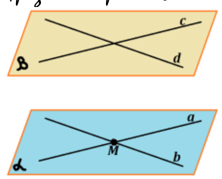
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Решение:

а)



Признак параллельности двух плоскостей



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

$MN \parallel BC$ (т.к. $AM = 4$ и $DN = 4$)

Осталось доказать, что $MK \parallel SB$

Пусть
SO — высота пирамиды
Тогда
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
$AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = 12$ (по теореме Пифагора)

$\triangle AKM \sim \triangle ABS$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
$$\left(\begin{matrix} \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{SA} \\ \angle MAK = \angle BAS \end{matrix}\right)$$
$=> MK \parallel SB$

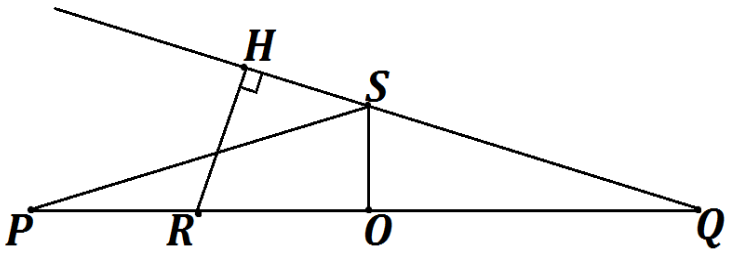
$=> (MNK) \parallel (SBC)$
■

б)
Пусть P — середина AD
Пусть R — середина MN
Пусть Q — середина BC

$(SPQ) \perp BC$
Расстояние от точки M до (SBC) равно расстоянию от точки R до (SBC), потому что M и R лежат на одной прямой
Итак, расстояние от точки R до прямой SQ — искомое

Рассмотрим $\triangle PQS$ — равнобедренный
$SQ = SP = \sqrt{SO^2 + OQ^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)
$PQ = AB = 16$
Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы узнать тупоугольным или остроугольным является $\triangle PQS$:

$$\cos\angle PSQ = \frac{SP^2 + SQ^2 - PQ^2}{2 \cdot SP \cdot SQ} = \frac{\sqrt{80}^2 + \sqrt{80}^2 - 16^2}{2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80}}$$
$\cos\angle PSQ < 0 \ => \triangle PQS$ — тупоугольный:



RH — искомое расстояние
$RQ = 12$
$\sin\angle OQS = \frac{SO}{SQ} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
$\sin\angle HQR = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{HR}{RQ}$
$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{HR}{12}$
$HR = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2{,}4\sqrt{5}$

Ответ: б) $2{,}4\sqrt{5}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x-3^x+2}{9^x-3^x}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{2\cdot 3^{x+1}-2}{3^x}.$$

Решение:
Пусть $3^x=t$

$$\frac{t^2-t+2}{t^2-t}+\frac{5t-19}{t-4}\le\frac{6t-2}{t}$$

$$\frac{t^2-t+2}{t^2-t}+\frac{5t-20+1}{t-4}\le\frac{6t-2}{t}$$

$$\frac{t^2-t}{t^2-t}+\frac{2}{t^2-t}+\frac{5t-20}{t-4}+\frac{1}{t-4}\le\frac{6t}{t}-\frac{2}{t}$$

$$1+\frac{2}{t^2-t}+5+\frac{1}{t-4}\le 6-\frac{2}{t}$$

$$\frac{2}{t^2-t}+\frac{1}{t-4}+\frac{2}{t}\le 0$$

$$\frac{2}{t(t-1)}+\frac{1}{t-4}+\frac{2}{t}\le 0$$

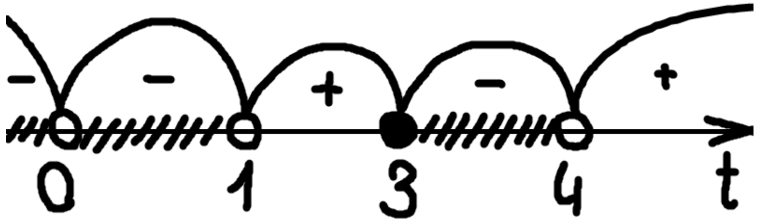
$$\frac{2\cdot(t-4)+1\cdot(t^2-t)+2(t^2-5t+4)}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$$\frac{2t-8+t^2-t+2t^2-10t+8}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$$\frac{3t^2-9t}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$$\frac{3(t^2-3t)}{t(t-1)(t-4)}\le 0$$

$t^2-3t=0$ $t(t-3)=0$ $t=0$ $t=3$	$t(t-1)(t-4)\ne 0$ $t\ne 0$ $t\ne 1$ $t\ne 4$



$t<1$ $3^x<1$ $3^x<3^0$ $x<0$	$3\le t<4$ $3\le 3^x<4$ $3^1\le 3^x<3^{\log_3 4}$ $1\le x<\log_3 4$	$t\ne 0$ $3^x\ne 0$ Нет решений

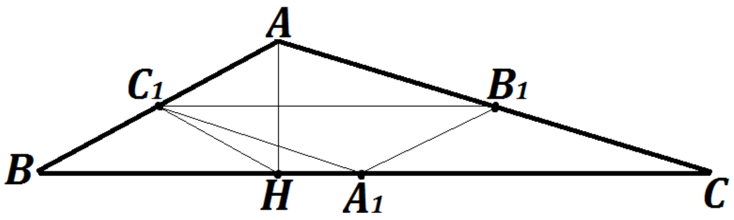
Ответ: $(-\infty;0)\cup[1;\log_3 4)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 —середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC=120°$, $\angle BCA=15°$.

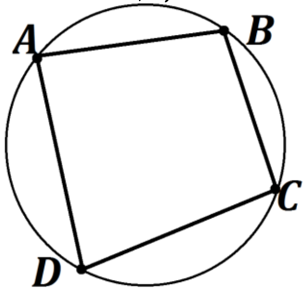
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC=4\sqrt{3}$.

Решение:
а)



Соединим точками четырёхугольник $A_1B_1C_1H$

Свойство четырёхугольника, вписанного в окружность

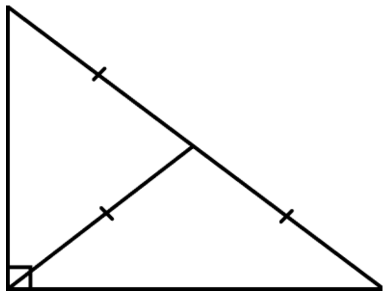


$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Наша задача – доказать, что сумма противоположных углов в данном четырёхугольнике равна 180°

Найдём углы внутри треугольника и подпишем их на рисунке:
$\angle BCA = 15°$
$\angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - 15 - 120 = 45°$
$\angle BAH = 180 - \angle AHB - \angle ABH = 180 - 90 - 45 = 45°$
$\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = 120 - 45 = 75°$

Свойство медианы



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный
C_1H – медиана
=>
$C_1H = AC_1$ (по свойству медианы в прямоугольном треугольнике)
=>
$\triangle AC_1H$ – равнобедренный
=>
$\angle AHC_1 = \angle BAH = 45°$

Признаки параллелограмма

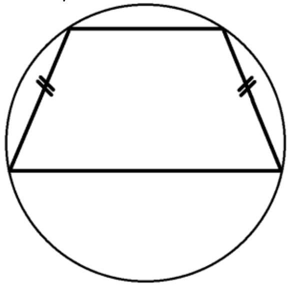
Четырёхугольник является параллелограммом:
1) Если две стороны равны и параллельны
2) Если противоположные углы попарно равны
3) Если противоположные стороны попарно равны
4) Если все противоположные стороны попарно параллельны
5) Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
6) Если сумма соседних углов равна 180 градусов
7) Если сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон
8) Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру

Рассмотрим $A_1BC_1B_1$
$\left.\begin{matrix} A_1B_1 \parallel BC_1 \\ A_1B_1 = BC_1 \end{matrix}\right.$ (т.к. A_1B_1 – средняя линия)
=>
$A_1BC_1B_1$ – параллелограмм
=>
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = 45°$
$\angle A_1HC_1 = \angle AHA_1 + \angle AHC_1 = 90 + 45 = 135°$

$\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1HC_1 = 45 + 135 = 180°$
=>
Четырёхугольник $A_1B_1C_1H$ можно вписать в окружность
=>
Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности
■

б)

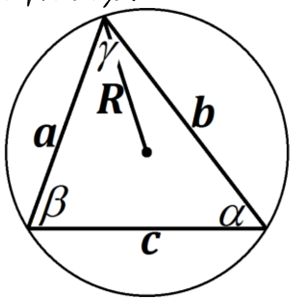
Свойство трапеции



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

$A_1B_1C_1H$ −равнобедренная трапеция (трапеция из-за параллельности двух сторон, а равнобедренная из-за того, что вписана в окружность)

Теорема синусов



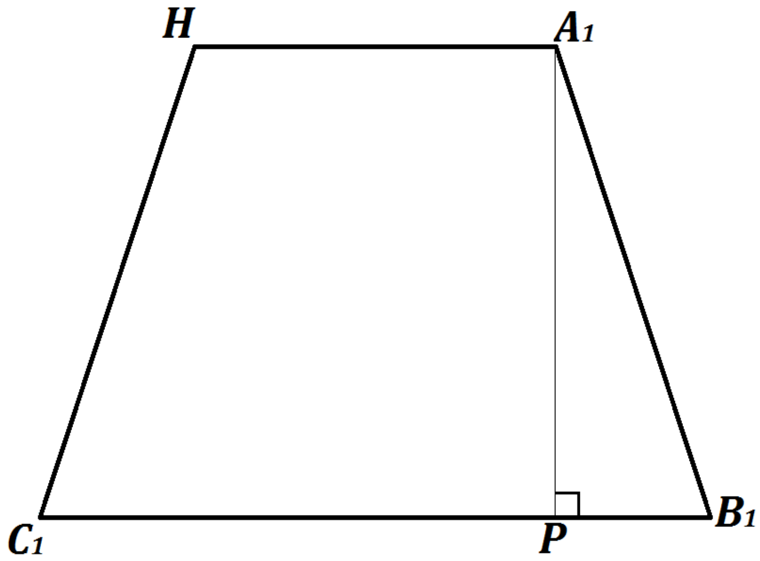
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$
или
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120°} = \frac{AB}{\sin 15°}$$

$$AB = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\sin 120°} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sin 15°}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sin 15°$$
=>
$$A_1B_1 = \frac{AB}{2} = \frac{8\sin 15°}{2} = 4\sin 15°$$
$$B_1C_1 = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Рассмотрим $A_1B_1C_1H$:



Пусть
A_1P − высота трапеции

$\angle A_1B_1P = \angle ABC = 45°$
$\angle PA_1B_1 = 180 - \angle A_1PB_1 - \angle A_1B_1P = 180 - 90 - 45 = 45°$
=>
$\triangle A_1B_1P$ −равнобедренный

По теореме Пифагора:
$A_1B_1{}^2 = B_1P^2 + A_1P^2$
$A_1B_1{}^2 = 2B_1P^2$
$(4\sin 15°)^2 = 2B_1P^2$
$16\sin^2 15° = 2B_1P^2$
$B_1P^2 = 8\sin^2 15°$
$B_1P = 2\sqrt{2}\sin 15°$

$A_1H = B_1C_1 - 2B_1P = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\sin 15°$

Формулы сложения и вычитания аргументов
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\sin 15° = \sin(45-30)°$
$\sin 15° = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$
$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$A_1H = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$
$A_1H = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$A_1H = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 = 2$

Ответ: б) 2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн рублей.

Решение:
Пусть
x –размер первоначального вклада
31 декабря – день начисления процентов
10 января – день пополнения вклада
1 января 2010 года – день открытия вклада

Составим таблицу как изменялась сумма на счёте:

Число	Сумма на счёте
01.01.2010	x
10.01.2010	
31.12.2010	$\left(1+\dfrac{10}{100}\right)\cdot x = 1{,}1x$
10.01.2011	

31.12.2011	$1{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}21x$
10.01.2012	$1{,}21x + 3$
31.12.2012	$1{,}1 \cdot (1{,}21x + 3) = 1{,}331x + 3{,}3$
10.01.2013	$1{,}331x + 3{,}3 + 3 = 1{,}331x + 6{,}3$
31.12.2013	$1{,}1 \cdot (1{,}331x + 6{,}3) = 1{,}4641x + 6{,}93$

Итоговая сумма на счёте должна быть больше 20 млн рублей (по условию)
=>
$1{,}4641x + 6{,}93 > 20$млн.

$1{,}4641x > 13{,}07$
$x > 8{,}9269 \ldots$

Требуется найти наименьшее подходящее целое x
=>
$x = 9$

Ответ: 9 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

Решение:
Найдём координаты вершины параболы:

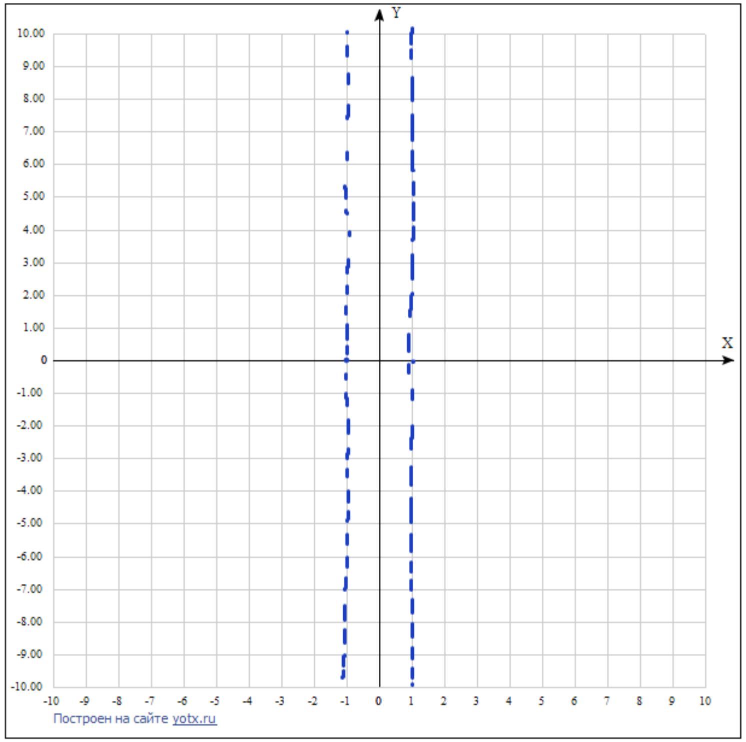
$x_0 = \frac{4a}{8} = \frac{a}{2}$

$y_0 = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + a^2 + 2a + 2$

$y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + 2a + 2$

$y_0 = 2a + 2$

Рассмотрим варианты местоположения вершины параболы:



1) Если вершина x_0 находится на луче $x \leq -1$ или на луче $x \geq 1$, то наименьшим значением функции будет y_0
2) Если вершина x_0 находится на интервале $-1 < x < 1$, то наименьшим значением функции будет $f(-1)$ или $f(1)$

Вариант №1

$x_0 \leq -1$ $\frac{a}{2} \leq -1$ $a \leq -2$ $\begin{cases} a \leq -2 \\ y_0 \geq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq -2 \\ 2a + 2 \geq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq -2 \\ 2a \geq 4 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq -2 \\ a \geq 2 \end{cases}$ Нет решений	$x_0 \geq 1$ $\frac{a}{2} \geq 1$ $a \geq 2$ $\begin{cases} a \geq 2 \\ y_0 \geq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 2 \\ a \geq 2 \end{cases}$ => $a \geq 2$

Вариант №2

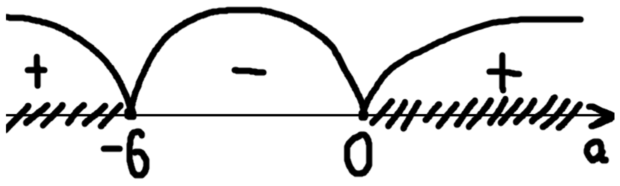
$$\begin{cases} -1 < x_0 < 1 \\ f(-1) \geq 6 \\ f(1) \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < \frac{a}{2} < 1 \\ 4 + 4a + a^2 + 2a + 2 \geq 6 \\ 4 - 4a + a^2 + 2a + 2 \geq 6 \end{cases}$$

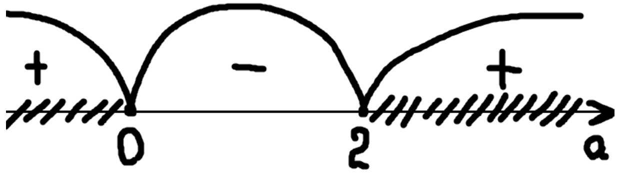
$$\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a^2 + 6a \geq 0 \\ a^2 - 2a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a(a + 6) \geq 0 \\ a(a - 2) \geq 0 \end{cases}$$

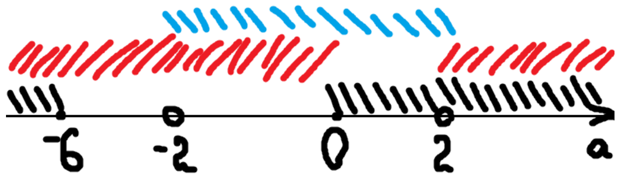
$a(a + 6) \geq 0$



$a(a - 2) \geq 0$



Объединим все три условия для a на одной числовой прямой:



=>
$a = 0$

Ответ: $a \in \{0\} \cup [2; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого	1

множества значений a	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов.
Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, славших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест – 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение:
а)
Пусть учеников было 3

	До повышения	После повышения
I	100 баллов	105 баллов
II	78 баллов	83 балла
III	0 баллов	5 баллов
	Средний балл сдавших 100 Средний балл не сдавших 39	Средний балл сдавших 94 ↓ Средний балл не сдавших 5 ↓

Т.е. нам подойдёт множество примеров, когда после повышения на 5 баллов один из учеников переходит из группы не сдавших в группу сдавших
=>
Могло

б)
Могло, как показано в примере в предыдущем пункте

в)
До добавления 5 баллов:
Пусть
≥ 83 баллов набрали x_1 человек и все они в сумме набрали S_1 баллов
78, 79, 80, 81 или 82 балла набрали x_2 человек и все они в сумме набрали S_2 баллов
≤ 77 баллов набрали x_3 человек и все они в сумме набрали S_3 баллов

$$\text{Средний балл всех} = \frac{\text{Сумма баллов всех}}{\text{Количество всех}}$$

$$90 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{x_1 + x_2 + x_3} \boxed{1}$$

$$\text{Средний балл сдавших} = \frac{\text{Сумма баллов сдавших}}{\text{Количество сдавших}}$$

$$100 = \frac{S_1}{x_1} \boxed{2}$$

$$\text{Средний балл не сдавших} = \frac{\text{Сумма баллов не сдавших}}{\text{Количество сдавших}}$$

$$75 = \frac{S_2 + S_3}{x_2 + x_3} \boxed{3}$$

После добавления 5 баллов:
Сдавших стало $x_1 + x_2$ человек
Сдавшие в сумме набрали $S_1 + x_1 \cdot 5 + S_2 + x_2 \cdot 5$

Получаем уравнение:

$$\text{Новый балл сдавших} = \frac{\text{Новая сумма баллов сдавших}}{\text{Новое количество сдавших}}$$

$$103 = \frac{S_1 + x_1 \cdot 5 + S_2 + x_2 \cdot 5}{x_1 + x_2} \boxed{4}$$

Не сдавших стало x_3 человек
Не сдавшие в сумме набрали $S_3 + x_3 \cdot 5$

Получаем уравнение:

$$\text{Новый балл не сдавших} = \frac{\text{Новая сумма баллов не сдавших}}{\text{Новое количество не сдавших}}$$

$$79 = \frac{S_3 + x_3 \cdot 5}{x_3} \boxed{5}$$

Получаем систему из 5 уравнений с 6 неизвестными:

$$\begin{cases} 90(x_1 + x_2 + x_3) = S_1 + S_2 + S_3 \\ 100x_1 = S_1 \\ 75(x_2 + x_3) = S_2 + S_3 \\ 103(x_1 + x_2) = S_1 + x_1 \cdot 5 + S_2 + x_2 \cdot 5 \\ 79x_3 = S_3 + x_3 \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \end{matrix} \begin{cases} 90x_1 + 90x_2 + 90x_3 = S_1 + S_2 + S_3 \\ 100x_1 = S_1 \\ 75x_2 + 75x_3 = S_2 + S_3 \\ 98x_1 + 98x_2 = S_1 + S_2 \\ 74x_3 = S_3 \end{cases}$$

Сложим уравнения 2 и 3, уравнения 4 и 5, а также запишем первое уравнение:

$$\begin{matrix} \boxed{6} \\ \boxed{7} \\ \boxed{8} \end{matrix} \begin{cases} 90x_1 + 90x_2 + 90x_3 = S_1 + S_2 + S_3 \\ 100x_1 + 75x_2 + 75x_3 = S_1 + S_2 + S_3 \\ 98x_1 + 98x_2 + 74x_3 = S_1 + S_2 + S_3 \end{cases}$$

Вычтем 6-е уравнение из 7-го и 8-е из 7-го:

$$\begin{cases} 10x_1 - 15x_2 - 15x_3 = 0 & \Big| : 5 \\ 2x_1 - 23x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \boxed{9} \\ \boxed{10} \end{matrix} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 23x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Вычтем 10-е уравнение из 9-го

$20x_2 - 4x_3 = 0$

$x_3 = 5x_2$

=>

x_3 кратно 5

Подставим значение x_3 в 9-е уравнение:

$2x_1 - 3x_2 - 15x_2 = 0$

$2x_1 = 18x_2$

$x_1 = 9x_2$

=>

x_1 кратно 9

Возьмём наименьшие подходящие условиям кратности значения:

$x_1 = 9$

$x_2 = 1$

$x_3 = 5$

Тогда

$$90 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{9 + 1 + 5} \boxed{1}$$

$S_1 + S_2 + S_3 = 1350$

$$100 = \frac{S_1}{9} \boxed{2}$$

$S_1 = 900$

$$75 = \frac{S_2 + S_3}{1 + 5} \boxed{3}$$

$S_2 + S_3 = 450$

$1350 = 900 + 450$

=>

Наименьшие возможные x_1, x_2 и x_3 нам подходят

=>

$x_1 + x_2 + x_3 = 9 + 1 + 5 = 15$

Ответ: а) да, б) да, в) 15

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2

Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4