Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

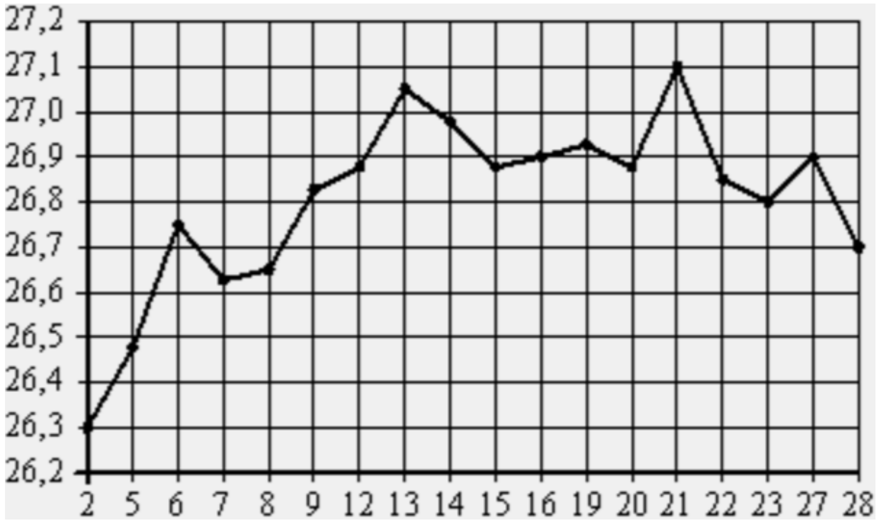
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В школе есть пятиместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно взять в поход, в котором участвует 29 человек?

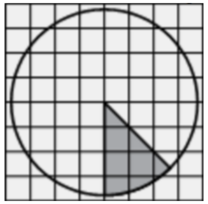
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни со 2 по 28 февраля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – курс евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа курс евро был наименьшим за указанный период.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге нарисован круг площадью 1,6. Найдите площадь закрашенного сектора.



Ответ: ___________________________.

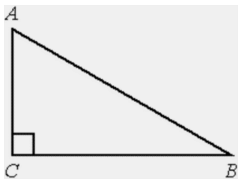
4 Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 70 выступлений – по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 28 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$6^{1+3x} = 36^{2x}$.

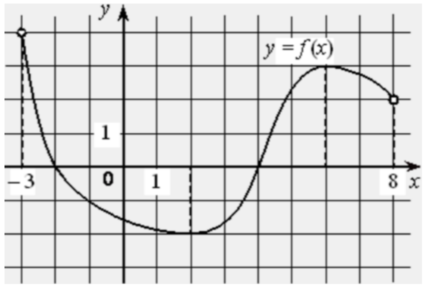
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABCугол Cравен $90°$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{21}$. Найдите $\cos A$.



Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 5]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ___________________________.

8 В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объём этого шара, делённый на π.

Ответ: ___________________________.

9 Найдите
$\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

10 Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $v = 2$моля воздуха объёмом $V_1 = 10$л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле
$A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 13{,}3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – постоянная, а $T = 300$ К – температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сосуда. Первый содержит 60 кг, а второй – 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 45% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции

$y=-\dfrac{x^2+36}{x}$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$12^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=5:3$ и $B_1F:FB=5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

15 Решите неравенство

$$\frac{25^x-5^{x+2}+26}{5^x-1}+\frac{25^x-7\cdot 5^x+1}{5^x-7}\le 2\cdot 5^x-24.$$

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=12$ и $BD=6{,}5$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

18 Найдите все значения $a>0$, при каждом из которых уравнение

$\left|1-6\sqrt{x}\right|=3(x+a)$

имеет ровно два корня.

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 85?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»
Данный ким составлен командой всероссийского волонтёрского проекта «ЕГЭ 100 баллов» https://vk.com/ege100ballov и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?
Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!
Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_39008096
(также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	7 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://vk.com/shkolapifagora https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	6
2	2
3	0,2
4	0,3
5	1
6	0,4
7	2
8	4,5
9	0,2
10	2,5
11	15
12	6
13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z.$ б)$2{,}25\pi;\ 3{,}25\pi$
14	97,5
15	$(-\infty;0)\cup[1;\log_5 7)$
16	5
17	11 млн
18	$\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$
19	а) да, например, для числа 510, б) Нет, в) 91

Решения и критерии оценивания заданий13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависитот полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутымответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможныеслучаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записиформы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоватьсябездоказательстваи ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общегообразования.

13 а) Решите уравнение

$12^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right].$

Решение:

а)

Умножение степеней с одинаковым показателем

$a^n\cdot b^n=(ab)^n$

$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$

$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}-3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}=0$

$3^{\sin x}\cdot(4^{\sin x}-4^{\cos x})=0$

$3^{\sin x}=0$ Нет решений, т.к. число в степени всегда положительно	$4^{\sin x}-4^{\cos x}=0$ $4^{\sin x}=4^{\cos x}$ $\sin x=\cos x \quad \vert :\cos x$ $\operatorname{tg} x=1$

	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z$
Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi = 1{,}25\pi \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = 2{,}25\pi \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{4} + 3\pi = 3{,}25\pi \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
Если $n = 4$, то $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = 4{,}25\pi \notin \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

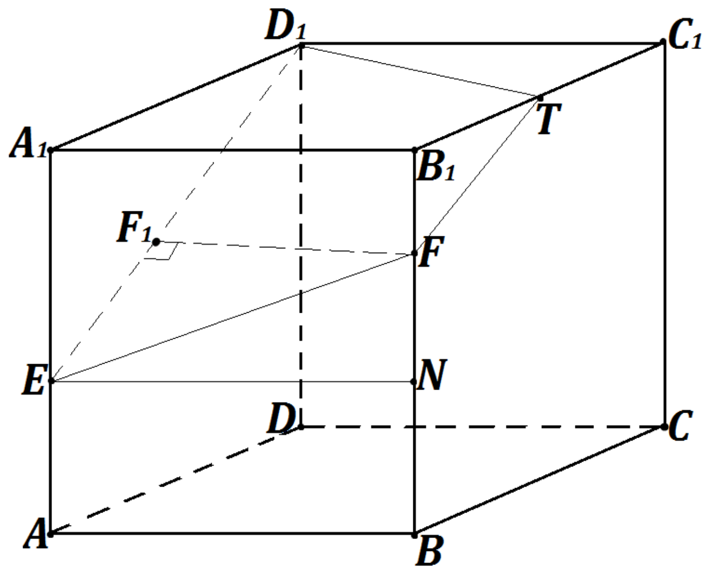
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$. б)$2{,}25\pi;\ 3{,}25\pi$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известны длины рёбер: $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA = 5:3$ и$B_1F:FB = 5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Решение:
а)



$A_1E:EA = 5:3$ и $AA_1 = 16$
=>
$A_1E = 10$
$EA = 6$

$B_1F:FB = 5:11$ и $BB_1 = 16$
=>
$B_1F = 5$
$FB = 11$

$T -$ середина B_1C_1
=>
$B_1T = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$
=>
$\triangle\ B_1FT$ –равнобедренный

Построим сечение:
Построим прямую EF, т.к. точки E и F лежат в одной плоскости
Построим прямую FT, т.к. точки F и T лежат в одной плоскости

Построим такую прямую через точку E, чтобы она была параллельна FT и т.к. $\triangle B_1FT$ – равнобедренный, то треугольник на плоскости AA_1D_1 тоже будет равнобедренным, а т.к.
$A_1E = A_1D_1 = 10$, то плоскость EFT проходит через вершину D_1
■

б)
ED_1TF – трапеция
Найдём стороны трапеции:

$ED_1 = \sqrt{EA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
$FT = \sqrt{TB_1^2 + B_1F^2} = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)
$TD_1 = \sqrt{TC_1^2 + C_1D_1^2} = \sqrt{5^2+(6\sqrt{2})^2} = \sqrt{97}$ (по теореме Пифагора)

Пусть EN – прямая, параллельная AB, тогда:
$EN = 6\sqrt{2}$ и $FN = BF - EA = 11 - 6 = 5$
$EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{97}$ (по теореме Пифагора)
=> ED_1TF – трапеция равнобедренная

Пусть FF_1 – высота трапеции, тогда:
$$F_1E = \frac{ED_1 - TF}{2} = \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = 2{,}5\sqrt{2}$$
$FF_1 = \sqrt{EF^2 - F_1E^2} = \sqrt{(\sqrt{97})^2 - (2{,}5\sqrt{2})^2} = \frac{13}{\sqrt{2}}$ (по теореме Пифагора)
$$S = \frac{ED_1 + TF}{2} \cdot FF_1 = \frac{10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{13}{\sqrt{2}} = 97{,}5$$

Ответ: 97,5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство
$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7\cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \le 2\cdot 5^x - 24.$$

Решение:

Пусть $5^x = t$

$$\frac{t^2 - 25t + 26}{t-1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t-7} \le 2t - 24$$

Нужно сократить $t-1$
$(t-24)(t-1) = t^2 - 25t + 24$
=>

$$\frac{t^2 - 25t + 24 + 2}{t-1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t-7} \le 2t - 24$$

$$\frac{(t-24)(t-1) + 2}{t-1} + \frac{t^2 - 7t + 1}{t-7} \le 2t - 24$$

$$\frac{(t-24)(t-1)}{t-1} + \frac{2}{t-1} + \frac{t^2 - 7t}{t-7} + \frac{1}{t-7} \le 2t - 24$$

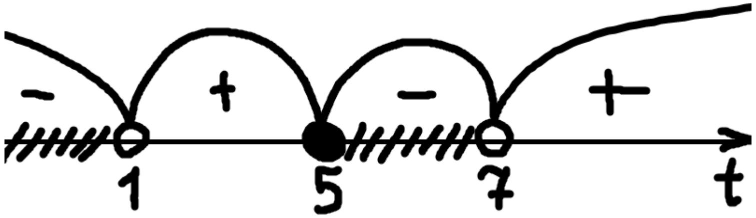
$$t - 24 + \frac{2}{t-1} + t + \frac{1}{t-7} \le 2t - 24$$

$$\frac{2}{t-1} + \frac{1}{t-7} \le 0$$

$$\frac{2t - 14 + t - 1}{(t-1)(t-7)} \le 0$$

$$\frac{3t - 15}{(t-1)(t-7)} \le 0$$

$3t - 15 = 0$ $t = 5$	$(t-1)(t-7) \ne 0$ $t \ne 1$ $t \ne 7$



$t < 1$ $5^x < 1$ $5^x < 5^0$ $x < 0$	$5 \le t < 7$ $5 \le 5^x < 7$ $5^1 \le 5^x < 5^{\log_5 7}$ $1 \le x < \log_5 7$

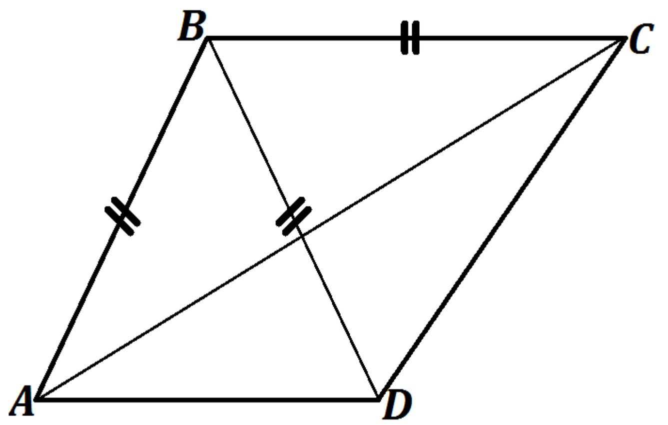
Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; \log_5 7)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC − биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

Решение:
а)



$AB = BD = BC$ (по условию)

Пусть $\angle BAC = \alpha$
$\triangle\ ABC$ − равнобедренный
=>
$\angle BAC = \angle ACB = \alpha$

$\angle CAD = \angle ACB = \alpha$
(т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC)
=>
AC − биссектриса угла BAD
■

б)
$AB = BD = BC = 6{,}5$
Идея поиска CD в том, чтобы найти косинус угла CBD и использовать теорему косинусов для треугольника CBD

$\angle BAD = \angle BDA = 2\alpha$
$\angle BDA = \angle CBD = 2\alpha$ (накрест лежащие)

Пусть

BH – высота треугольника ABC

Тогда

$$AH=\frac{1}{2}\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 12=6$$

$$\cos\alpha=\frac{AH}{AB}=\frac{6}{6{,}5}=\frac{12}{13}$$

Косинус двойного угла

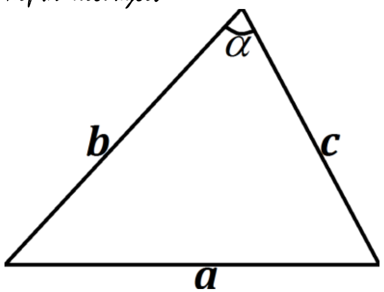
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$$\cos 2\alpha=2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^2-1=2\cdot\frac{144}{169}-1=\frac{288}{169}-\frac{169}{169}=\frac{119}{169}$$

Теорема Косинусов



$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$

или

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$CD^2=BC^2+BD^2-2\cdot BC\cdot BD\cdot\cos 2\alpha$

$$CD^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2-2\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{119}{169}$$

$$CD^2=\frac{169}{2}-\frac{119}{2}=\frac{50}{2}=25$$

$CD=5$

Ответ: 5

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S **–целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение:

Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot S = 1{,}25\cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}7\cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}25\cdot S - 0{,}7\cdot S = 0{,}55\cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}25\cdot 0{,}7\cdot S = 0{,}875\cdot S$
01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}4\cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}875\cdot S - 0{,}4\cdot S = 0{,}475\cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}25\cdot 0{,}4\cdot S = 0{,}5\cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	0

=>

01.04.2019	$0{,}5\cdot S - 0 = 0{,}5\cdot S$

По условию, каждая из выплат должна быть больше 5 млн рублей, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}55\cdot S > 5 \\ 0{,}475\cdot S > 5 \\ 0{,}5\cdot S > 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \frac{500}{55} \\ S > \frac{5000}{475} \\ S > \frac{50}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \frac{100}{11} \\ S > \frac{200}{19} \\ S > 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > 9\frac{1}{11} \\ S > 10\frac{10}{19} \\ S > 10 \end{cases}$$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S
=>
$S = 11$

Ответ: 11 млн

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ	2

Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения $a>0$, при каждом из которых уравнение
$|1-6\sqrt{x}|=3(x+a)$
имеет ровно два корня.

Решение:

ОДЗ:
$x\geq 0$

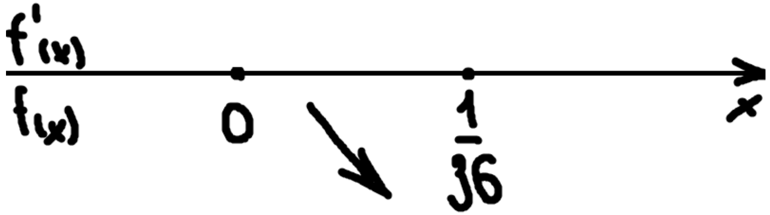
$|1-6\sqrt{x}|=3(x+a)$
$\frac{|1-6\sqrt{x}|}{3}=x+a$
$\frac{|1-6\sqrt{x}|}{3}-x=a$

Решим графически:

Пусть $f(x)=\frac{|1-6\sqrt{x}|}{3}-x$
1 случай раскрытия модуля
Если $0\leq x\leq\frac{1}{36}$, то
$f(x)=\frac{1-6\sqrt{x}}{3}-x$
$f(x)=-2\sqrt{x}-x+\frac{1}{3}$

$-2\sqrt{x}$ – убывающая функция
$-x$ – убывающая функция
(т.к. при увеличении значения x, значение y становится всё меньше)
=>

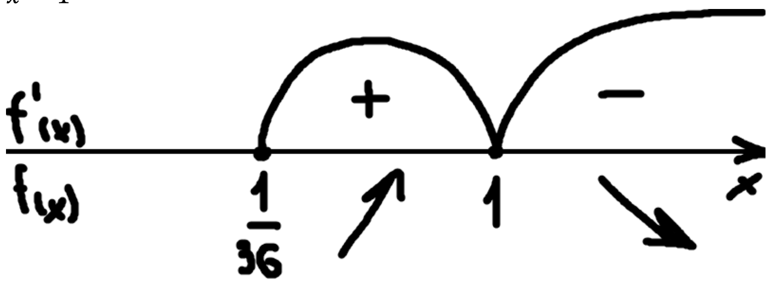
$f(x)=-2\sqrt{x}-x+\frac{1}{3}$убывает при$0\leq x\leq\frac{1}{36}$



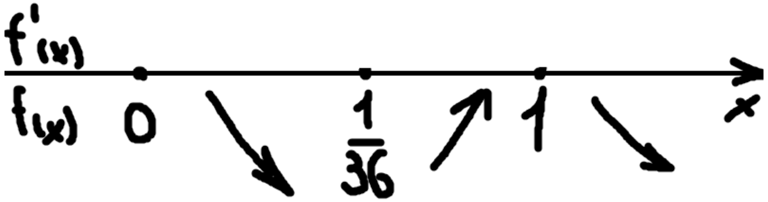
2 случай раскрытия модуля
Если $x>\frac{1}{36}$, то
$f(x)=\frac{6\sqrt{x}-1}{3}-x$
$f(x)=2\sqrt{x}-x-\frac{1}{3}$

Исследуем $f(x)$ на возрастание/убывание
$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
$\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$

$1-\sqrt{x}=0$
$\sqrt{x}=1$
$x=1$



Склеим данные о монотонности $f(x)$ на одной числовой прямой:



Найдём значения в данных трёх точках:

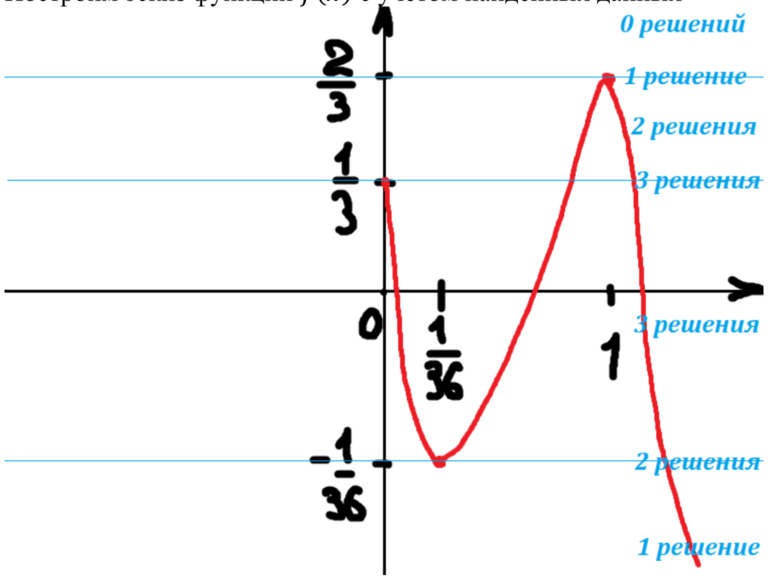
$$f(x)=\frac{|1-6\sqrt{x}|}{3}-x$$

$$f(0)=\frac{|1-6\sqrt{0}|}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{36}\right)=\frac{\left|1-6\sqrt{\frac{1}{36}}\right|}{3}-\frac{1}{36}=-\frac{1}{36}$$

$$f(1)=\frac{|1-6\sqrt{1}|}{3}-1=\frac{2}{3}$$

Построим эскиз функции $f(x)$ с учётом найденных данных



Графически определим сколько решений имеет уравнение $\frac{|1-6\sqrt{x}|}{3}-x=a$

Если

$a>\frac{2}{3}$(0 решений)

$a=\frac{2}{3}$(1 решение)

$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$(2 решения)

$a=\frac{1}{3}$(3 решения)

$-\frac{1}{36}<a<\frac{1}{3}$(3 решения)

$a=-\frac{1}{36}$(2 решения)

$a<-\frac{1}{36}$(1 решение)

Но по условию задачи мы ищем только положительные значения a =>

$a=-\frac{1}{36}$(2 решения) нам не подходит

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 181217

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 85?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?
.

Решение:

Пусть
a −число сотен $1 \le a \le 9$
b −числодесятков $0 \le b \le 9$
c −числоединиц $0 \le c \le 9$
Но b и c вместе не должны равняться нулю
Тогда
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ −данное трёхзначное число

а)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 85$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 85 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 85a + 85b + 85c$
$15a = 75b + 84c$

c может быть только нулём

Тогда
$15a = 75b$

Нетрудно подобрать подходящую комбинацию:
$a = 5$
$b = 1$
$c = 0$
=>
Может, частное числа 510 и суммы его цифр равно 85

б)
$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = 84$$

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 84 \cdot (a + b + c)$
$100a + 10b + c = 84a + 84b + 84c$
$16a = 74b + 83c$

Рассмотрим варианты комбинаций b и c, начиная с наименьших:
Вариант #1
$b = 0$
$c = 0$
Не подходит по условию
Вариант #2
$b = 0$
$c = 1$

Тогда
$16a = 83$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #3
$b = 1$
$c = 0$

Тогда
$16a = 74$
Не подходит, т.к. a должно быть целым
Вариант #4
$b = 1$
$c = 1$

Тогда
$16a = 74 + 83$
$16a = 157$
Не подходит, т.к.
$1 \le a \le 9$
$16 \le 16a \le 144$
=>
дальнейшее увеличение значений b и c не имеет смысла, т.к. правая часть уравнения будет всё больше и больше
=>
Не может

в)
Пусть
k −искомое наибольшее значение частного

$$\frac{a \cdot 100 + b \cdot 10 + c}{a + b + c} = k$$

$100a + 10b + c = ka + kb + kc$

$100a - ka = kb - 10b + kc - c$

$(100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c$

По условию:
$a \le 9 \quad \Big| \cdot (100 - k)$

$(100 - k)a \le 9(100 - k)$

$(k - 10)b + (k - 1)c \le 9(100 - k)$

Сравним
$(k - 1)c$ и $(k - 10)c$
$kc - c$ и $kc - 10c$
=>
$(k - 1)c \ge (k - 10)c \quad \Big| + (k - 10)b$

$(k - 10)b + (k - 1)c \ge (k - 10)b + (k - 10)c$

Получаем двойное неравенство:
$(k - 10)b + (k - 10)c \le (k - 10)b + (k - 1)c \le 9(100 - k)$

Оставляем только крайние части двойного неравенства
=>
$(k - 10)b + (k - 10)c \le 9(100 - k)$
$(k - 10)(b + c) \le 9(100 - k)$

$(b + c)$должно быть, как можно меньшим, т.к. правая часть неравенства будет тем больше, чем меньше будет левая

$(b + c) \ne 0$ (по условию)
=>
$(b + c) \ge 1$

Возьмём $(b + c) = 1$

$(k - 10) \cdot 1 \le 9(100 - k)$
$k - 10 \le 900 - 9k$
$10k \le 910$
$k \le 91$

Требуется найти наибольшее подходящее натуральное k
=>
$k = 91$

Приведём пример
910
$$\frac{9 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 0}{9 + 1 + 0} = 91$$

Ответ: а) да, например, для числа 510, б) Нет, в) 91

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4