Текстовые задачи на проценты. Банковские проценты.

ЕГЭ Профиль №11, №17

Формулы. Сложные проценты.

Понятие сложного процента. Если данное число ежегодно (ежемесячно, ежедневно, …) увеличивается (уменьшается) на p% без изъятия прироста (т.е. прирост за год добавляется к первоначальной величине и проценты за следующий год исчисляются с наращенной величины.

- Число *b* составляет *p%* от *a*: $b = a\cdot\frac{p}{100}$
- Число *a* увеличивается на *p%* *n* раз: $a\cdot(1+\frac{p}{100})^n$
- Число *a* уменьшается на *p%* *n* раз: $a\cdot(1-\frac{p}{100})^n$
- Число *a* увеличивается сначала на $p_1\%$, а затем на $p_2\%$: $a\cdot\left(1+\frac{p1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p2}{100}\right)$
- Число *a* уменьшается сначала на $p_1\%$, а затем на $p_2\%$: $a\cdot\left(1-\frac{p1}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p2}{100}\right)$
- Число *a* увеличивается сначала на $p_1\%$, а затем уменьшается на $p_2\%$: $a\cdot\left(1+\frac{p1}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p2}{100}\right)$

1. *Текстовые задачи на %. Задание №11 ЕГЭ Профиль.*

№1.1 В 2008 году в городском квартале проживало 60000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 2%, а в 2010 году – на 3% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение:

Воспользуемся формулой сложных процентов.

$60000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right) = 60000\cdot\frac{102}{100}\cdot\frac{103}{100} = 6\cdot 102\cdot 103 = 6\cdot(10000+500+6) = 60000+3000+36 = 63036.$

<u>Ответ:</u> 63036.

№1.2 Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 19800 рублей, через два года был продан за 16038 рублей.

Решение:

Воспользуемся формулой сложных процентов.

Пусть *p* - число процентов, на которое уменьшается цена холодильника.

$19800 \cdot (1-\frac{p}{100})^2 = 16038$,

$(1-\frac{p}{100})^2 = \frac{81}{100}$,

$1-\frac{p}{100} = \frac{9}{10}$,

100 - p =90,

p = 10.

<u>Ответ:</u> 10.

№1.3 В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 64% процента дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

Решение:

Воспользуемся формулой сложных процентов.

Пусть *a* – цена акции, а число процентов - *p*.

Тогда $a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{p}{100}\right) = a \cdot \left(1-\frac{64}{100}\right)$,

$1-\frac{p^2}{100^2} = 1-\frac{64}{100}$,

$\frac{p^2}{100^2} = \frac{64}{100}$, $p^2=6400$, p=80.

<u>Ответ</u>: 80 %.

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

№ 1.4 Бизнесмен Оладьев получил в 2015 году прибыль в размере 1200000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 7% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Оладьев за 2017 год?

№1.5 В 2008 году в городском квартале проживало 30000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 10%, а в 2010 году – на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

№1.6 Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 22800 рублей, через два года был продан за 18770 рублей.

№1.7 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 64% процента дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

2. *Банковские задачи. Задание №17 ЕГЭ Профиль.*

1. **Решение задач с помощью формулы сложных процентов.**

№2.1 Катя хочет взять кредит 1200000 рублей. Погашение происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320000 рублей?

Решение:

1 год 1)На сумму 1200000 начисляют 10% :

$1200000 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right) = 1200000 \cdot 1{,}1 = 1320000$ рублей – стал долг банку,

2) 1320000 – 320000 = 1000000 рублей – остаток после выплаты.

2 год 1)1000000 · 1,1 = 1100000 рублей – стал долг банку,

2) 1100000 – 320000 = 780000 рублей – остаток после выплаты.

3 год 1)7800000 · 1,1 = 858000 рублей – стал долг банку,

2)858000 – 320000 = 538000 рублей – остаток после выплаты.

4 год 1)538000 · 1,1 = 591800 рублей – стал долг банку,

2)591800 - 320000 = 271800 рублей – остаток после выплаты.

5 год *1)*271800 · 1,1 = 298980 рублей – стал долг банку,

2) 298980 – 298980 = 0 рублей.

Последняя выплата 298980 < 320000. Значит, Катя погасит кредит за 5 лет.

Ответ: 5 лет.

№2.2 По вкладу «А» в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года. А по вкладу «Б» - увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение:

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма X.

По вкладу «А» по 10% ставке на конец третьего года будет сумма:

$X \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = X \cdot 1{,}1^3 = 1{,}331X.$

По вкладу «Б» по 11% ставке на конец второго года будет сумма:

$X \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = X \cdot 1{,}11^2 = 1{,}2321X.$

Пусть по вкладу «Б» третий год начисляется p%, тогда на конец третьего года получим сумму: $1{,}2321X \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$.

По условию задачи надо найти такое целое значение *p*, при котором вклад «Б» будет выгоднее вклада «А». Составим неравенство

$1{,}2321X \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) > 1{,}331X$

$123{,}21 + 1{,}2321p > 133{,}1$

$1{,}2321p > 9{,}89$

$p > 9{,}89 : 1{,}2321 = 8{,}02\ldots$

$p > 8{,}02\ldots$

Так как p – целое число, то p = 9.

<u>Ответ</u>: 9.

№2.3 31 декабря 2014 года Иван взял в банке 6951000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть, увеличивает долг на 10%), затем Иван переводит в банк платёж. Весь долг Иван выплатил за три равных платежа. На сколько рублей меньше он отдал бы банку, если бы мог выплатить долг за два равных платежа?

Решение:

Пусть X – сумма, которую взяли в кредит по 10% годовых. 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент t=1,1. A - платёж для погашения кредита.

Оставшаяся сумма долга после 1-ого платежа: $X_1 = X \cdot t - A$.

Оставшаяся сумма долга после 2-ого платежа: $X_2 = X_1 \cdot t - A = (X \cdot t - A) \cdot t - A = Xt^2 - At - A$.

Оставшаяся сумма долга после 3-ого платежа:

$X_3 = X_2 \cdot t - A = (Xt^2 - At - A) \cdot t - A = Xt^3 - At^2 - At - A = Xt^3 - A(t^2 - t + 1)$.

I схема погашения кредита за 3 года.

$X_3 = 0 \quad Xt^3 - A(t^2-t+1) = 0$, $A = \frac{Xt^3}{t^2-t+1} = \frac{6951000 \cdot 1{,}1^3}{1{,}1^2 - 1{,}1 + 1} = 2795100$

Сумма, которую Иван заплатил банку $2795100 \cdot 3 = 8385300$ рублей.

II схема погашения кредита за 2 года.

$X_2 = 0 \quad Xt^2 - At - A = 0$, $A = \frac{Xt^2}{t+1} = \frac{6951000 \cdot 1{,}1^2}{1{,}1 + 1} = 4005100$

Сумма, которую Иван заплатил банку $4005100 \cdot 2 = 8010200$ рублей.

8385300 – 8010200 = 375100 рублей

Ответ: на 375100 рублей.

2. **Решение задач, в которых платёж остаётся неизменным в течение всего срока действия кредитного договора, с помощью формулы.**

Пусть **X** – заём, **n** – количество выплат, **a** – процентная ставка, **A** – размер одной выплаты,

$\mathbf{t = 1 + \frac{a}{100}}$ - коэффициент увеличения ставки (тот множитель, на который мы умножаем заём, чтобы узнать сколько должны банку по прошествии года).

Тогда $\mathbf{Xt^n \cdot (t-1) = A(t^n - 1)}$

№2.4

<u>Дано:</u>

X= 2100000 рублей

n=2

A=1210000 рублей

<u>Найти</u>: a (под какой процент взяли кредит?)

<u>Решение:</u> $Xt^n \cdot (t-1) = A\ (t^n - 1)$

$2100000\ t^2 \cdot (t-1) = 1210000\ (t^2 - 1)$

$2100000\ t^2 = 1210000\ (t + 1)$

$210\ t^{2-}\ 121t - 121 = 0$

$D = 121^2 + 4 \cdot 210 \cdot 121 = 121(121+840) = 121 \cdot 961 = 11^2 \cdot 31^2 = 341^2$

$t_{1,2} = \frac{121 \pm 341}{420}$

$t_1 = 1{,}1$; $t_2 < 0$ –не подходит по смыслу задачи.

$1{,}1 = 1 + \frac{a}{100}$

a= 10 %.

<u>Ответ</u>: 10%

- *Решим задачи №2.1 и №2.3 с помощью данной формулы*.

№2.3 31 декабря 2014 года Иван взял в банке 6951000 рублей в кредит по 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть, увеличивает долг на 10%), затем Иван переводит в банк платёж. Весь долг Иван выплатил за три равных платежа. На сколько рублей меньше он отдал бы банку, если бы смог выплатить долг за два равных платежа?

<u>Дано:</u>

X= 6951000 рублей

a = 10%

$n_1=3$, $n_2=2$

<u>Найти</u>: $S_2 - S_1$

Решение:

$S_1=A_1\cdot n_1$, $S_2=A_2\cdot n_2$, $t=1+\frac{10}{100}=1{,}1$.

$Xt^n\cdot(t-1) = A\,(t^n-1)$

$A=\frac{X\cdot t^n(t-1)}{t^n-1}$

$A_1=\frac{6951000\cdot 1{,}1^3(1{,}1-1)}{1{,}1^3-1}=\frac{6951000\cdot 1{,}331\cdot 0{,}1}{1{,}331-1}=\frac{6951000\cdot 0{,}1331}{0{,}331}=\frac{6951000\cdot 133{,}1}{331}=$ $21000\cdot 133{,}1=2795100$ рублей

$A_2=\frac{6951000\cdot 1{,}1^2(1{,}1-1)}{1{,}1^{32}-1}=\frac{6951000\cdot 1{,}21\cdot 0{,}1}{1{,}21-1}=\frac{6951000\cdot 0{,}121}{0{,}21}=\frac{6951000\cdot 12{,}1}{21}=$ $331000\cdot 12{,}1=4005100$ рублей

$S_1=2795100\cdot 3 = 8385300$ рублей, $S_2=4005100\cdot 2 = 8010200$ рублей.

$S_1-S_2 = 8385300 - 8010200 = 375100$ рублей

Ответ: на 375100 рублей.

№2.1. Катя хочет взять кредит 1200000 рублей. Погашение происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320000 рублей?

Дано:

X= 1200000 рублей

a = 10%

A =320000 рублей

Найти: n

Решение:

$\mathbf{Xt^n\cdot(t-1) \le A\,(t^n-1)}$

$Xt^n\cdot(t-1) - A\,t^n \le -A$

$A\,t^n - Xt^n\cdot(t-1) \ge A$

$t^n\,(A - X(t-1)) \ge A$

Так как X(t-1) < A, то $\mathbf{t^n} \geq \frac{A}{A - X(\mathbf{t-1})}$ $(t=1+\frac{10}{100}=1{,}1)$.

$$1{,}1^n \geq \frac{320000}{320000 - 1200000(1{,}1-1)}$$

$$1{,}1^n \geq \frac{320000}{320000 - 120000} = \frac{320000}{200000} = \frac{32}{20} = 1{,}6$$

$1{,}1^n \geq 1{,}6$

n=1: $1{,}1^1 = 1{,}1$

n=2: $1{,}1^2 = 1{,}21$

n=3: $1{,}1^3 = 1{,}331$

n=4: $1{,}1^4 = 1{,}4641$

n=5: $1{,}1^6 = 1{,}60051$

Значит, n=5.

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения:

№2.5 Оля хочет взять кредит 100000 рублей. Погашение происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

№2.6 По вкладу «А» в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года. А по вкладу «Б» - увеличивает на 21% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

№2.7 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» - увеличивать эту же сумму на 8% в первый год и на одинаковое целое число *n* процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение *n*, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

№2.8 31 декабря 2013 года Тимофей взял в банке 7007000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть, увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за три равных платежа. На сколько рублей меньше он отдал бы банку, если бы смог выплатить долг за два равных платежа?